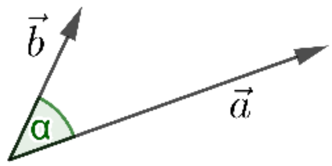
Словарь 12.
Скалярное произведение векторов

Угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – величина меньшего угла, на который можно повернуть один из векторов до положения сонаправленности с другим вектором.



Угол с нулевым вектором можно считать любым (его значение не определено).

Работа силы $\vec{f}$ – произведение модулей векторов силы и перемещения, умноженных на косинус угла между ними: $A = |\vec{f}||\vec{s}|cos\alpha$.

Скалярное произведение (или скалярное умножение) двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – число $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos(\vec{a}^\wedge\vec{b})$.

Свойства скалярного произведения:

1. Скалярное произведение сонаправленных векторов равно произведению их длин: $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$ $(\alpha = 0) \Leftrightarrow ab = |a||b|$.
2. Если угол между векторами острый, произведение ***a*** на ***b*** больше 0: $\vec{a}^\wedge\vec{b} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ab > 0$.
3. Для ортогональных векторов произведение равно 0: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow ab = 0$.
4. Если угол тупой, скалярное произведение меньше 0: $\vec{a}^\wedge\vec{b} > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ab < 0$.
5. При максимальном угле 180° (то есть векторы противоположно направлены), их произведение противоположно произведению их длин: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ $(\alpha = \pi) \Leftrightarrow ab = -|a||b|$.

Теорема. *Скалярное умножение векторов обладает следующими свойствами*:

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (операция коммутативна, то есть порядок множителей не существенен, это очевидно следует из определения),

2) $(r\vec{a})\vec{b} = r(\vec{a}\vec{b})$ (коэффициент r можно вынести за скобки скалярного произведения),

3) $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|$, или $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, или $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ ($\vec{a}^2$ называют скалярным квадратом вектора.)

4) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (операция скалярного умножения дистрибутивна относительно сложения).

Теорема. *Пусть в ПДСК* $\vec{a}(a_1,\ a_2), \vec{b}(b_1,\ b_2)$. *Тогда*

$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$,

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$,

$cos(\ \vec{a}\hat{}\vec{b}) = \frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$.

Теорема. *Пусть в ПДСК* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. *Тогда*

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

$$cos(\ \vec{a}\hat{}\vec{b}) = \frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

Направляющие косинусы – косинусы углов $\vec{a}\hat{}\vec{\imath}$ и $\vec{a}\hat{}\vec{\jmath}$:

$\vec{a}(a_1,\ a_2), \vec{b}(b_1,\ b_2\ ) \Longrightarrow \cos(\vec{a}\hat{}\vec{\imath}) = \frac{a_1}{|a|}$, $\cos\ (\vec{a}\hat{}\vec{\jmath}) = \frac{a_2}{|a|}$.

При этом

$\cos^2(\vec{a}\hat{}\vec{\imath}) + \cos^2(\vec{a}\hat{}\vec{\jmath}) = 1$ (*сумма квадратов направляющих косинусов вектора* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *равна* 1).

Теорема. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна

$S_{\text{пар.}} = \sqrt{(\bar{a})^2 \cdot (\bar{b})^2 - (\bar{a}\bar{b})^2}$.

Площадь соответствующего треугольника равна половине площади этого параллелограмма,

$S_{\text{тр.}} = \frac{1}{2}\sqrt{(\bar{a})^2 \cdot (\bar{b})^2 - (\bar{a}\bar{b})^2}$.