Практическое занятие 12.

Векторное и смешанное произведение

Задача 1. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+3\vec{b}$ и $3\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – единичные векторы, угол между которыми равен 30°.

Решение. Площадь параллелограмма, построенного на векторах, равна модулю их векторного произведения. Преобразуем векторное произведение $\vec{a}+3\vec{b}$ и $3\vec{a}+\vec{b}$, используя свойства:

$$\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)=3(\vec{a}\times\vec{a})+\vec{a}\times\vec{b}+9\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+3\left(\vec{b}\times\vec{b}\right)=$$
$$=3\cdot 0+\vec{a}\times\vec{b}-9\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+3\cdot 0=-8\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).$$

Тогда модуль вектора $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\times\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)$ равен:

$$\left|-8\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|=8\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=8\cdot|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\frac{\pi}{6}=8\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=4.$$

Ответ. $S=4$.

Задача 2. Пусть в пространстве задана ПДСК. Известно, что вектор $\vec{h}$ ортогонален векторам $\vec{a}(2;3;-2)$ и $\vec{b}(2;2;0)$, при этом $\left|\vec{h}\right|=2$. Найти $\vec{h}$.

Решение. Так как $\vec{h}$ ортогонален $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то он коллинеарен их векторному произведению. Вычислим векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, зная их координаты:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=4\vec{\imath}-4\vec{\jmath}-2\vec{k}.$$

Так как $\vec{h}\,||\,\vec{a}\times\vec{b}$, то координаты $\vec{h}$ пропорциональны координатам $\vec{a}\times\vec{b}$, которые равны $(4,-4,-2)$.

Пусть $\vec{h}$ имеет координаты (x,y,z).

Тогда $\begin{cases}x=4t\\ y=-4t,\\ z=-2t\end{cases}$ где t – некоторое число.

Имеем

$$\left|\vec{h}\right|=2\ \Rightarrow\ \left|\vec{h}\right|^2=4\ \Rightarrow\ (4t)^2+(-4t)^2+(-2t)^2=4\ \Rightarrow\ 36t^2=4\ \Rightarrow\ t^2=\frac{1}{9}.$$

Значит, параметр t равен $\pm\frac{1}{3}$.

Поэтому координаты вектора равны $\left(\frac{4}{3};\ -\frac{4}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$ или $\left(-\frac{4}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{2}{3}\right)$.

Ответ. $\vec{h}\left(\frac{4}{3};\ -\frac{4}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$ или $\vec{h}\left(-\frac{4}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{2}{3}\right)$.

Замечание. Если дополнительно задать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{h}$ положительно ориентированы, то тогда $\vec{h}$ будет сонаправлен вектору $\vec{a}\times\vec{b}$. В этом случае ответ однозначный: $\vec{h}\left(\frac{4}{3};\ -\frac{4}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$.

Задача 3. Известно, что $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=3$. Вычислить смешанные произведения:

$$\text{а) } \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)(\vec{c}+\vec{a});\quad \text{б) } \left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{b}-\vec{c}\right)(\vec{c}-\vec{a}).$$

Решение. а) Воспользуемся свойствами. Вначале, основываясь на дистрибутивных законах, раскроем скобки, затем упростим полученную сумму:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{b}+\vec{c}\right)(\vec{c}+\vec{a})=\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)(\vec{c}+\vec{a})+\vec{b}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)(\vec{c}+\vec{a})=$$
$$=\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\vec{c}+\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\vec{a}+\vec{b}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\vec{c}+\vec{b}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\vec{a}=$$
$$=\vec{a}\vec{b}\vec{c}+\vec{a}\vec{c}\vec{c}+\vec{a}\vec{b}\vec{a}+\vec{a}\vec{c}\vec{a}+\vec{b}\vec{b}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}\vec{c}+\vec{b}\vec{b}\vec{a}+\vec{b}\vec{c}\vec{a}=$$
$$=\vec{a}\vec{b}\vec{c}+0+0+0+0+0+0+\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}+\vec{a}\vec{b}\vec{c}=2\vec{a}\vec{b}\vec{c}=2\cdot 3=6.$$

Среди 8 слагаемых, получившихся после раскрытия скобок, 6 равны 0. Это следует из того, что если в смешанном произведении есть два одинаковых вектора, то оно равно 0 (так как в соответствующем определители будут две одинаковые строки).

б) Преобразовать указанное выражение можно по аналогии с пунктом а). Но здесь можно поступить по-другому. Заметим, что векторы $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{c}-\vec{a}$ линейно зависимы, так как третий вектор выражается через два первых:

$$\vec{c}-\vec{a}=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\left(\vec{b}-\vec{c}\ \right).$$

А смешанное произведение линейно зависимых векторов равно 0.

Ответ. а) 6; б) 0.

Задача 4. В треугольной пирамиде с вершинами в точках $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 0;\ 2)$, $C(2;\ 2;\ 2)$, $D(3;\ 4;\ –3)$, вычислить высоту, опущенную из вершины D.

Решение. Высота пирамиды участвует в формуле объема:

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot h\quad\Rightarrow\quad h=\frac{3V_{\text{пир}}}{S_{\text{осн}}}.$$

Если рассмотреть векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}$, то можно применить формулы:

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|\ \text{ и }\ S_{\text{осн}}=S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Найдем координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, и вычислим нужные векторное и смешанное произведения.

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}\left(1;\ -1;\ 1\right),\ \vec{b}=\overrightarrow{AC}(1;\ 1;1),\ \vec{c}=\overrightarrow{AD}(2;\ 3;-4).$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 3 - 2 - (2 + 3 + 4) = -3 - 9 = -12.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 0\vec{j} + 2\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b}(-2; 0; 2).$$

Итак,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot |-12| = 2, S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 0 + 4} = \frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{2}.$$

Значит,

$$h = \frac{3V_{\text{пир}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Ответ. $3\sqrt{2}$.