Лекция 12.

Векторное произведение векторов

Наряду со скалярным произведением определим векторное произведение, которое ставит в соответствие двум векторам новый вектор, а не число.

Нам понадобятся понятия левого и правого базисов.

По аналогии с плоскостью, в геометрическом пространстве можно выделить две ориентации: правую и левую.

Базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ трехмерного пространства называют правым, если три пальца правой руки (большой, указательный, средний) можно расположить по направлению этих векторов. Более четко это можно охарактеризовать таким свойством: если смотреть с конца первого вектора, то переход от второго к третьему вектору будет осуществляться против часовой стрелки (рис. 1).

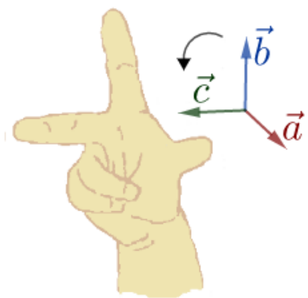

Рис. 1 - правый базис

Если же тройка базисных векторов соответствует трем пальцам левой руки, то базис называют левым. В этом случае переход от второго вектора к третьему осуществляется по часовой стрелке (рис. 2).

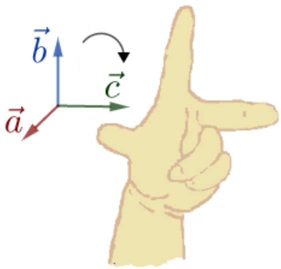

Рис. 2 - левый базис

Одну из этих ориентаций называют положительной. Обычно такой ориентацией называют ориентацию правого базиса. Мы в дальнейшем при рассмотрении примеров положительно ориентированным будем называть именно правый базис.

Пусть даны два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3).

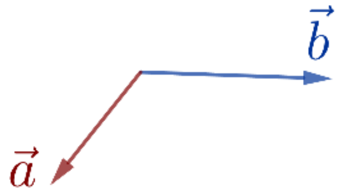

Рис. 3

Векторным произведением неколлинеарных векторов называется вектор, который удовлетворяет следующим условиям:

1) он ортогонален каждому из данных векторов (рис. 4);

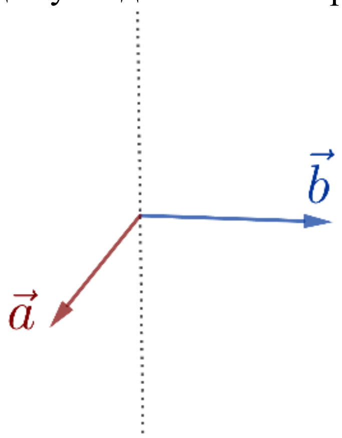

Рис. 4

2) его длина равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 5).

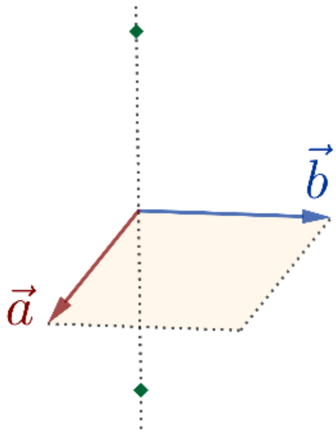

Рис. 5

3) ориентация векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и их векторного произведения положительна (рис. 6).

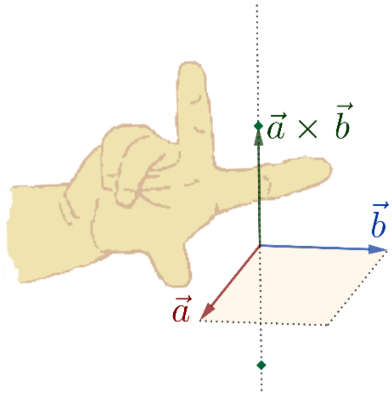

Рис. 6

Векторное произведение коллинеарных векторов равно 0.

Итак, каждым двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ однозначно сопоставляется новый вектор $\vec{a} \times \vec{b}$, характеризуемый длиной и направлением следующим образом:

для векторов $\vec{a} \nparallel \vec{b}$:

1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ и $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$,

2) $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\text{пар}-\text{ма} \leftrightsquigarrow \vec{a} \text{ и } \vec{b}}$,

3) ориентация $(\vec{a},\ \vec{b}, (\vec{a} \times \vec{b}))$ положительна;

для $\vec{a} \parallel \vec{b}$:

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Из определения вытекают дополнительные **свойства** этой операции.

1. Расписав площадь параллелограмма через длины сторон и угол между ними, из второго пункта определения можно получить равенство:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\,|\sin(\vec{a}^\wedge\vec{b})\,|.$$

2. Площадь треугольника, построенного на векторах ***a*** и ***b***, равна половине площади соответствующего параллелограмма, то есть одной второй модуля векторного произведения:

$$S_{\text{тр}-\text{а} \leftrightsquigarrow \vec{a} \text{ и } \vec{b}} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

3. Векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда угол между ними равен 0 или π, то есть когда их векторное произведение равно нулевому вектору:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

4. При смене порядка записи векторов их произведение изменяет знак на противоположный:

$$-(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \times \vec{a}.$$

Действительно, поменяв векторы, мы меняем ориентацию базиса (рис. 7).

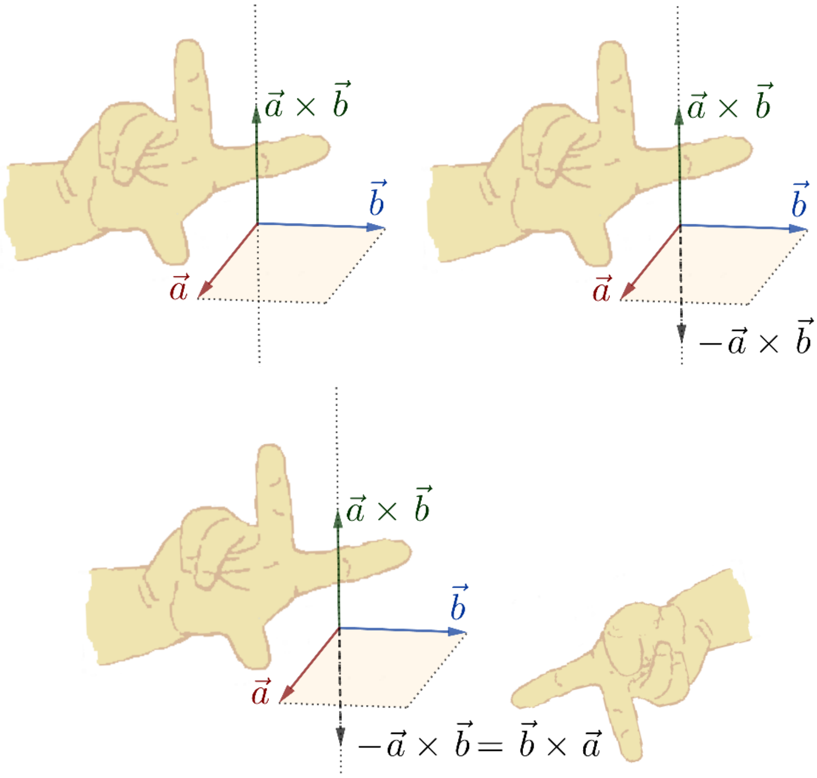

Рис. 7

5. Скаляр можно вынести за скобки векторного произведения:

$$(r\vec{a}) \times \vec{b} = r\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{a} \times \left(r\vec{b}\right).$$

6. Также это произведение дистрибутивно относительно операции сложения, что дает возможность раскрывать скобки обычным образом:

$$(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) \times \vec{b} = \overrightarrow{a_1} \times \vec{b} + \overrightarrow{a_2} \times \vec{b} \text{ и}$$

$$\vec{b} \times (\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) = \vec{b} \times \overrightarrow{a_2} + \vec{b} \times \overrightarrow{a_2}.$$

Найдем координатную формулу для вычисления векторного произведения. Для этого разложим векторы по ортонормированному базису:

$$\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}, \qquad \vec{b} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}$$

Перемножим эти выражения, раскрыв скобки в силу последнего свойства:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}\right) \times \left(b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}\right) =$$

$$= a_1b_1\vec{\imath} \times \vec{\imath} + a_1b_2\vec{\imath} \times \vec{\jmath} + a_1b_3\vec{\imath} \times \vec{k} +$$

$$+a_2b_1\vec{\jmath} \times \vec{\imath} + a_2b_2\vec{\jmath} \times \vec{\jmath} + a_2b_3\vec{\jmath} \times \vec{k} +$$

$$+a_3b_1\vec{k} \times \vec{\imath} + a_3b_2\vec{k} \times \vec{\jmath} + a_3b_3\vec{k} \times \vec{k}.$$

Равные векторы дадут в произведении нулевой вектор:

$$\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}.$$

При перестановке множителей местами возникает знак «минус»:

$$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}.$$

Приводим подобные:

$$\vec{a}\times\vec{b} = a_1b_1\vec{i}\times\vec{i} + a_1b_2\vec{i}\times\vec{j} + a_1b_3\vec{i}\times\vec{k} +$$

$$+a_2b_1\vec{j}\times\vec{i} + a_2b_2\vec{j}\times\vec{j} + a_2b_3\vec{j}\times\vec{k} +$$
$$+a_3b_1\vec{k}\times\vec{i} + a_3b_2\vec{k}\times\vec{j} + a_3b_3\vec{k}\times\vec{k}.$$
$$= (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{i}\times\vec{j} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{k}\times\vec{i} + (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{j}\times\vec{k}.$$

Учтем взаимосвязь базисных векторов:

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}, \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}, \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}\ (\text{рис. } 8).$$

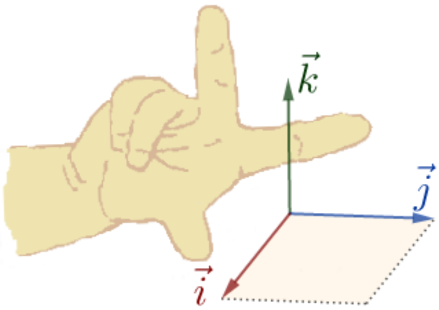

Рис. 8

Получаем представление вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ в виде линейной комбинации базисных.

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{i}\times\vec{j} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{k}\times\vec{i} + (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{j}\times\vec{k} =$$
$$= (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i}.$$

Коэффициенты могут быть записаны как определители второго порядка.

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Получаем теорему.

Теорема. *Если в положительно ориентированной ПДСК заданы координаты векторов* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, *то их векторное произведение вычисляется по формуле*:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

или $\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$

Эту формулу можно записать в более простой форме, а именно, в виде определителя третьего порядка, где первая строка – это векторы базиса, две другие строки – это координаты вектора:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Если разложить этот определитель по первой строке, то получится в точности указанная выше сумма.

Из этой формулы легко получить формулу для площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(a_1,\, a_2)$ и $\vec{b}\ (b_1,\, b_2)$ с координатами в ПДСК на плоскости (рис. 9).

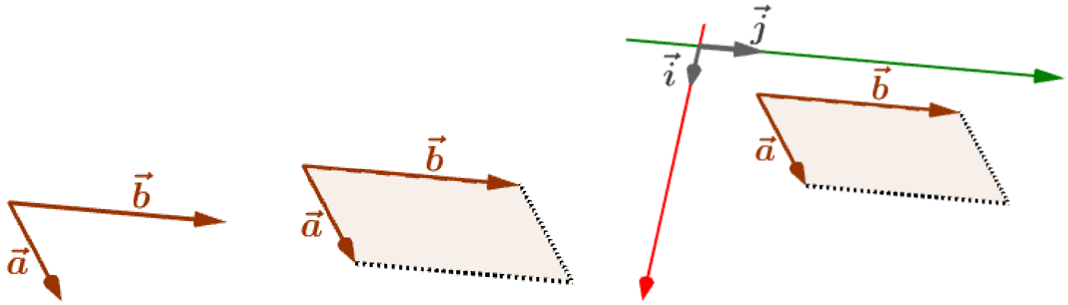

Рис. 9

Площадь такого параллелограмма равна модулю определителя, составленного из координат этих векторов:

$$S_{\text{пар-ма} \rightsquigarrow \vec{a} \text{ и } \vec{b}} = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right|.$$

Докажем эту формулу.

Имеем

$$\vec{a}(a_1,\, a_2)_{(E_2)},\ \vec{b}(b_1,\, b_2)_{(E_2)}.$$

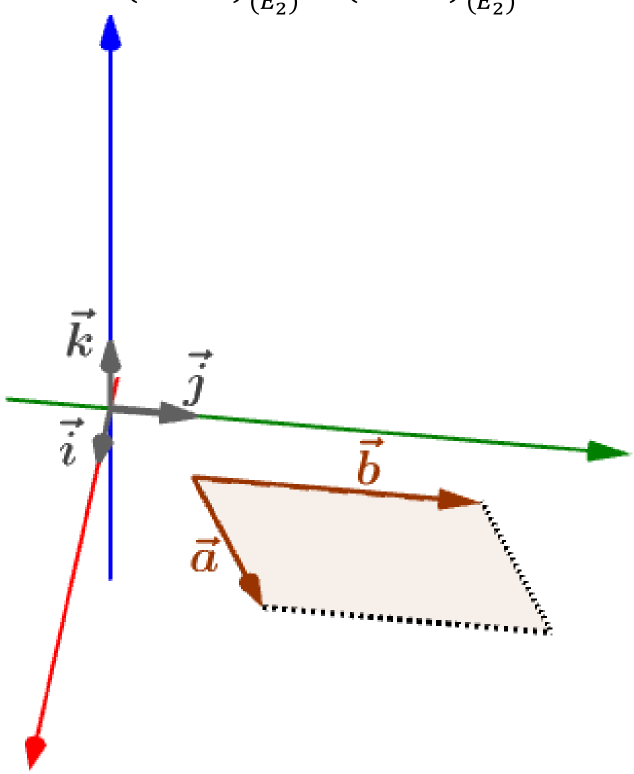

Рис. 10

Добавим к двум базисных векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ плоскости третий вектор $\vec{k}$, ортогональный им, получим трехмерную ПДСК (рис. 10), в которой

$$\vec{a}(a_1,\ a_2,\ 0)_{(E_3)}, \vec{b}(b_1,\ b_2,\ 0)_{(E_3)}$$

(третья координата векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна 0).

Воспользуемся тем, что

$$S_{\text{пар−ма} \leftrightsquigarrow \vec{a} \text{ и } \vec{b}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$$

Подставим векторов координаты в формулу для векторного произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Первые две координаты вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ (то есть коэффициенты при векторах $\vec{i}$ и $\vec{j}$) обнулятся, а третья координата равна указанному определителю (например, разложим определитель по последнему столбцу):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(0,\ 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

Нужна длина этого вектора:

$$S_{\text{пар−ма} \leftrightsquigarrow \vec{a} \text{ и } \vec{b}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\left(0,\ 0, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)\right| = \left|\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|.$$

Итак, $S_{\text{пар−ма} \leftrightsquigarrow \vec{a} \text{ и } \vec{b}}$ равна модулю указанного определителя.

Рассмотрим пример на вычисление векторного произведения.

Возьмем сюжетную задачу. Пусть в системе координат заданы направление мачты корабля $\vec{m}(0,0,1)$ и направление ветра $\vec{v}(1,2,0)$ (север-северо-восток). Найдем координаты поперечного направления паруса для того, чтобы наилучшим образом «захватить» ветер (рис. 11).

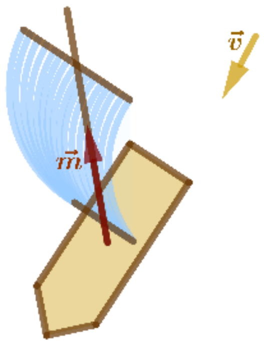

Рис. 11

Нужное направление $\vec{p}$ должно быть перпендикулярно мачте и направлению ветра, то есть параллельно их векторному произведению (рис. 12):

$$\vec{p} \perp \vec{m}, \vec{p} \perp \vec{v} \implies \vec{p} \parallel \vec{v} \times \vec{m}.$$

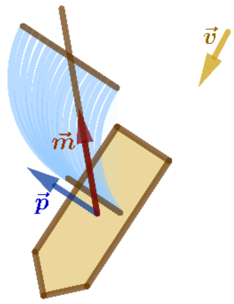

Рис. 12

Вычислим вектор $\vec{v}\times\vec{m}$.

Составим соответствующий определитель:

$$\vec{v}\times\vec{m}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

Выполнив разложение полученного определителя по первой строке:

$$\vec{v}\times\vec{m}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=2\vec{i}-1\vec{j}+0\vec{k},$$

получим координаты векторного произведения: (2; –1; 0). Значит,

$$\vec{p}\parallel(2,\ -1,\ 0).$$

Иногда бывает полезно среди всех векторов одного направления взять вектор единичной длины. Для этого нужно умножить этот вектор на коэффициент, обратный его длине.

Итак, направление паруса можно задать единичным вектором

$$\vec{p}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,\ -1,\ 0).$$

В следующем примере вычислим степень s освещенности точки на плоскости E_2.

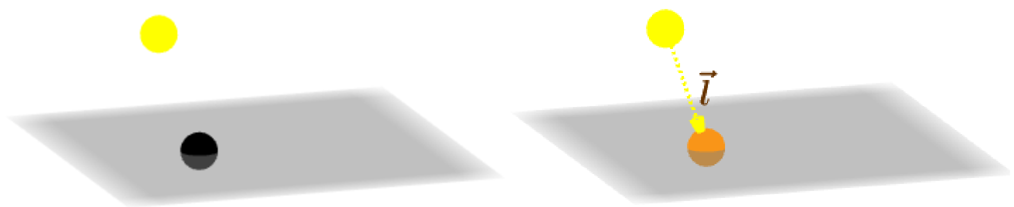

Рис. 13

Пусть известен единичный вектор направления света $\vec{l}$.

Возьмем единичный вектор $\vec{n}$, который перпендикулярен данной плоскости (рис. 14). Такой вектор $\vec{n}$ называют единичным нормальным вектором к этой плоскости.

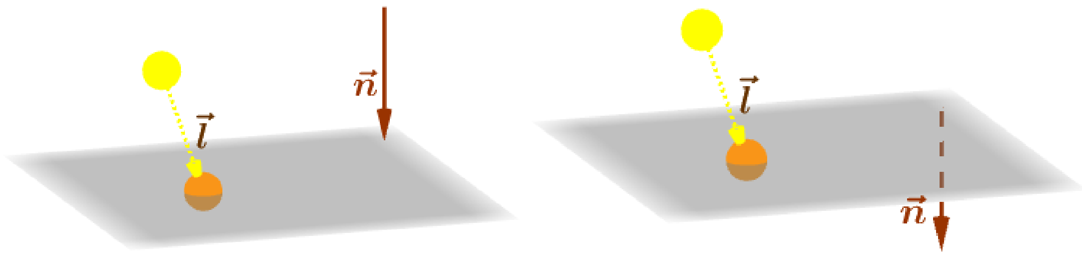

Рис. 14

Тогда коэффициент освещенности точки равен скалярному произведению векторов $\vec{n}$ и $\vec{l}$:

$$s = \vec{n}\vec{l}.$$

Выберем в плоскости единичный ортонормированный базис $\vec{e_1}, \vec{e_2}$, который вместе с вектором $\vec{n}$ задает положительную ориентацию (рис. 15).

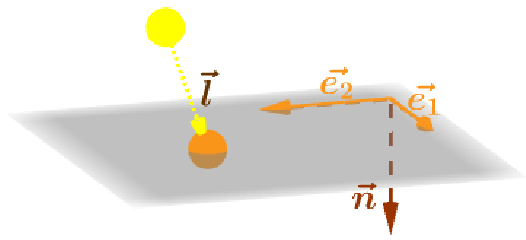

Рис. 15

Тогда векторное произведение базисных векторов совпадет с $\vec{n}$:

$$|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 1, \vec{e_1} \perp \vec{e_2} \Longrightarrow \vec{n} = \vec{e_1} \times \vec{e_2}.$$

Значит, коэффициент освещенности s будет равен выражению

$$s = \vec{n}\vec{l} = (\vec{e_1} \times \vec{e_2})\vec{l}.$$

Если направление света параллельно плоскости, освещенность плоскости минимальна, скалярное произведение $\vec{n}\vec{l}$ равно 0. Наибольшая степень освещенности достигается тогда, когда свет падает на плоскость прямо, то есть направление света перпендикулярно плоскости, то есть параллельно нормали (рис. 16).

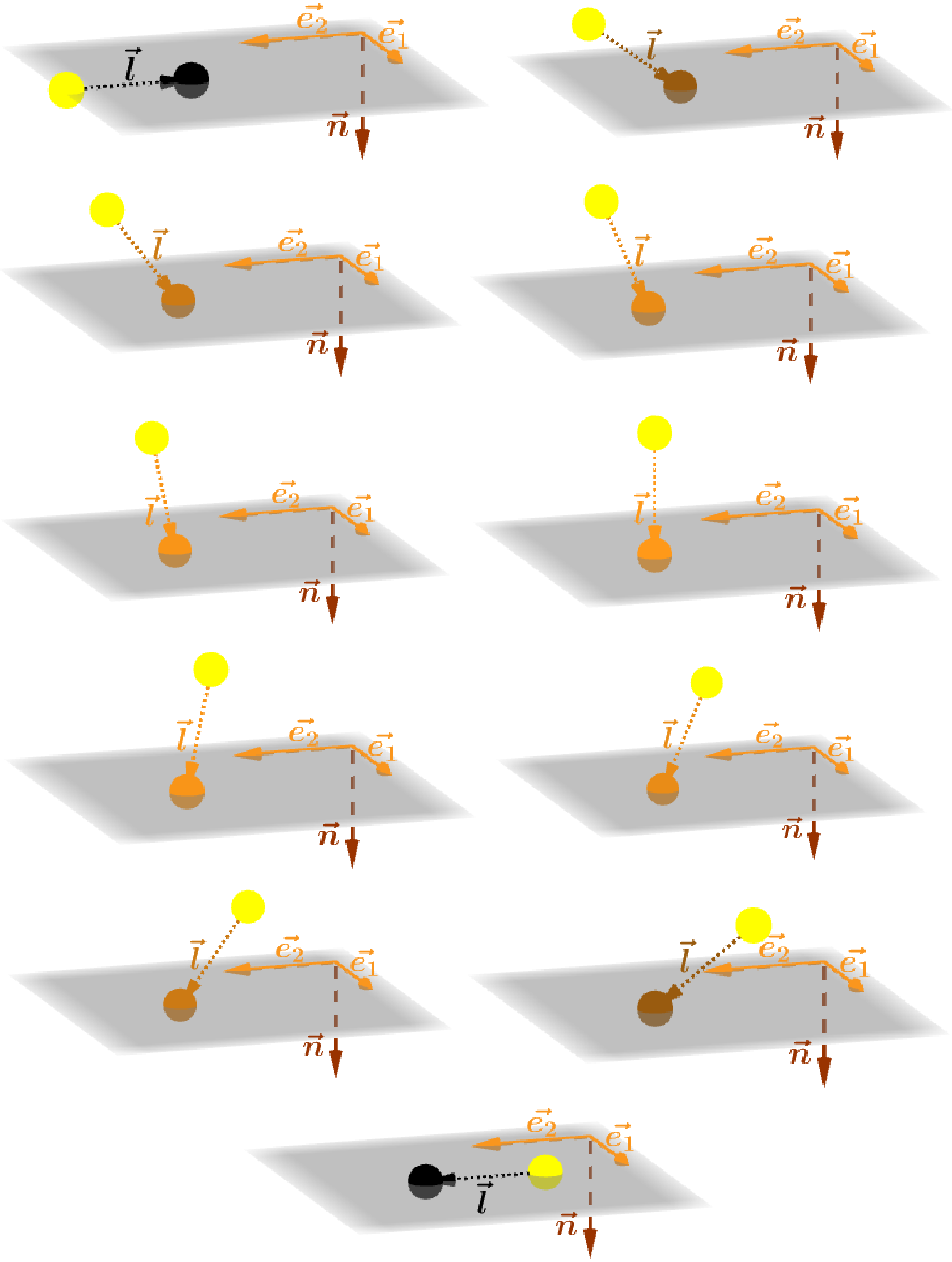

Рис. 16

Заметим, записанное выражение для освещенности

$$s = (\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2})\vec{l}$$

зависит от трех векторов и принимает числовое значение, так как скалярное произведение — это число.

Результат последовательного выполнения двух умножений

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c},$$

сначала векторного, а затем скалярного, называется смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Записывают:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Итак, операция смешанного произведения сопоставляет трем векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ число $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис, который положительно ориентирован (рис. 17)

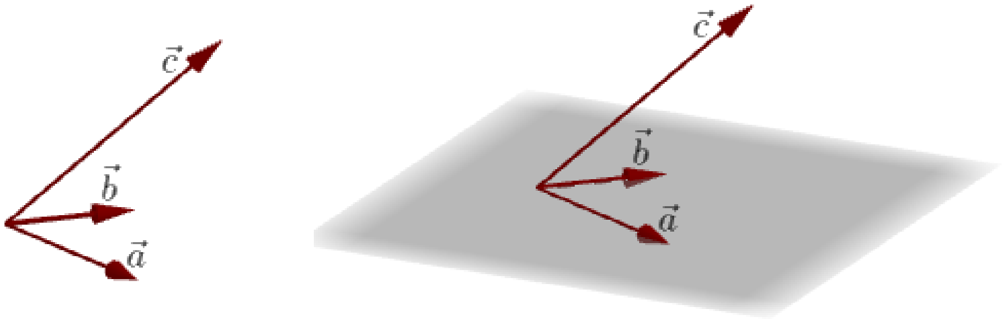

Рис. 17

Угол, нужный при вычислении скалярного произведения получается острым, поэтому смешанное произведение исходных векторов больше 0 (рис. 18).

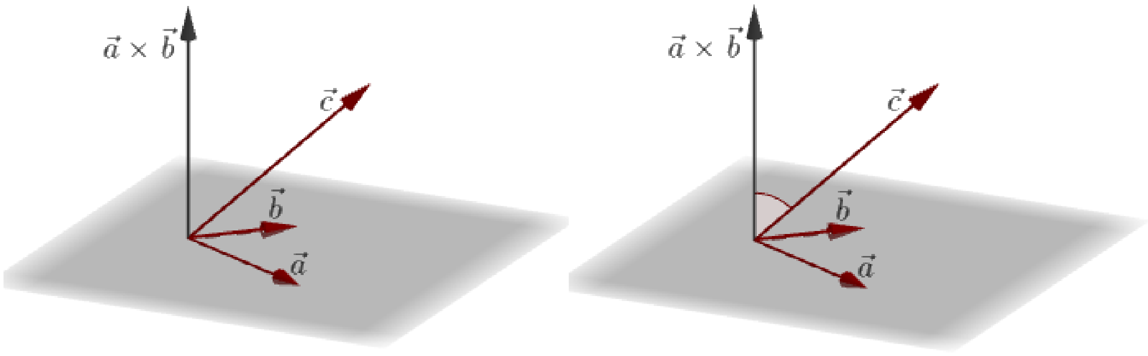

Рис. 18

Если же векторы компланарны, то угол будет прямым, и смешанное произведение равно 0.

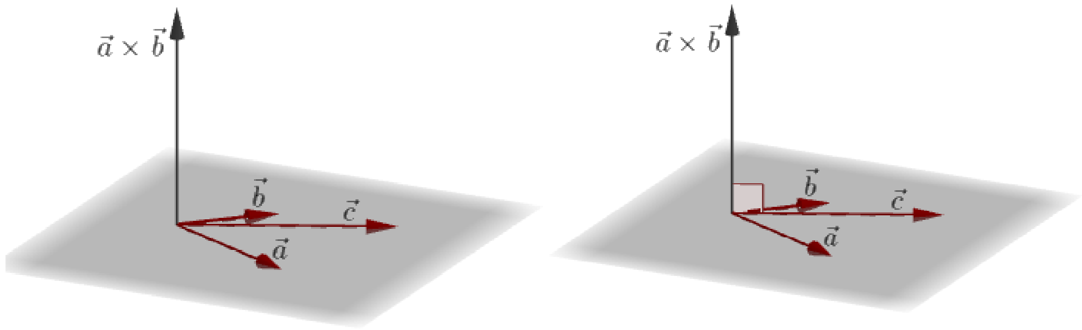

Рис. 19

При отрицательно ориентированном базисе, получим тупой угол, значит, смешанное произведение отрицательно.

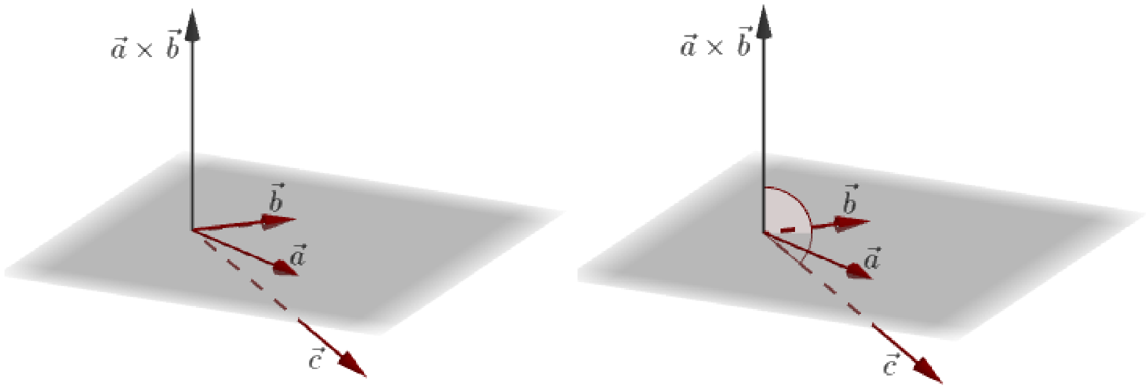

Рис. 20

Итак,

1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ «+» ориентирован $\Leftrightarrow (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$

2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ «-» ориентирован $\Leftrightarrow (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$

Любые три некомпланарных вектора задают построенный на них параллелепипед (рис. 21).

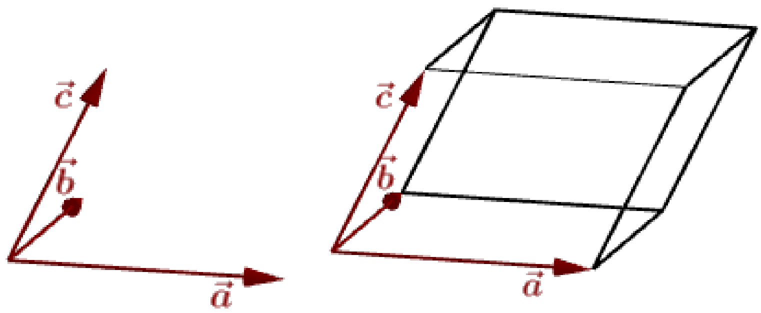

Рис. 21

Выполняется следующая

Теорема. *Если три вектора* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *не компланарны, то модуль их смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах*:

$$V_{\text{пар-да} \leftrightsquigarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Для обоснования этой формулы вспомним, что объем параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту (рис. 22):

$$V = S_{\text{осн.}}h.$$

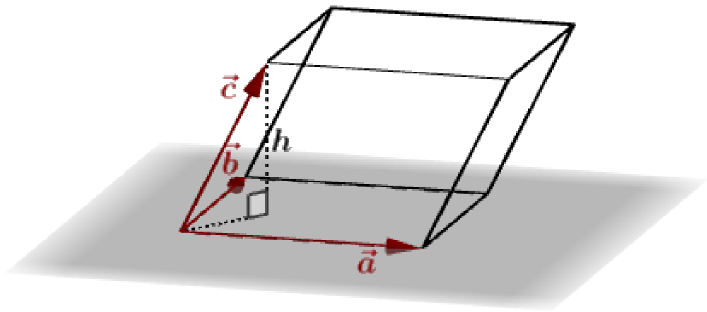

Рис. 22

Площадь параллелограмма – это модуль векторного произведения

$$S_{\text{пар-ма} \leftrightsquigarrow \vec{a},\vec{b}} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Длину высоты можно выразить через угол, используемый при подсчете скалярного произведения (рис. 23).

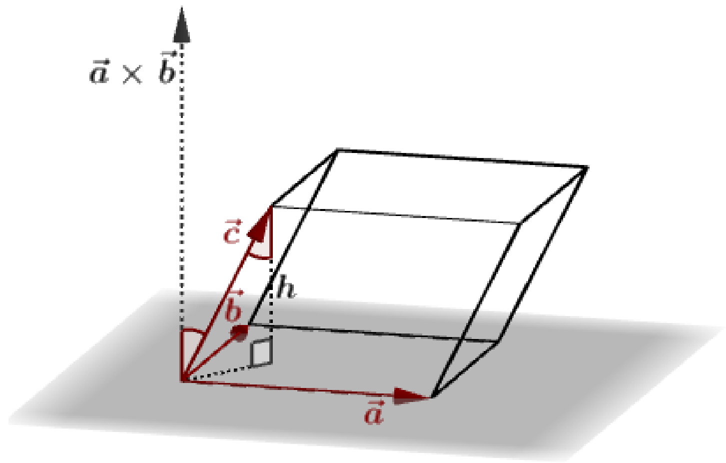

Рис. 23

Находим:

$$h = |\vec{c}|\left|cos\angle\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)\right|.$$

После подстановки в формулу для объема, получаем требуемую формулу:

$$V = Sh \ = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right||\vec{c}|\left|cos\angle\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)\right| \ = \left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}\right| \ = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Если рассмотреть тетраэдр, построенный на трех некомпланарных векторах, то его объем будут в 6 раз меньше объема соответствующего параллелепипеда. Поэтому объем указанного тетраэдра равен 1/6 модуля смешанного произведения.

Следствие. *Для некомпланарных векторов* $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$

$$V_{\text{тет}-\text{да} \rightsquigarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Рассмотрим и докажем формулу, позволяющую вычислять смешанное произведение векторов по их координатам.

Теорема. *Для положительно ориентированной ПДСК смешанное произведение векторов* $\vec{a}(a_1,\ a_2,\ a_3), \vec{b}(b_1,\ b_2,\ b_3), \vec{c}(c_1,\ c_2,\ c)$ *равно определителю, составленному из их координат:*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Для того чтобы понять, откуда получается такая формула, воспользуемся уже выведенной формулой для координат векторного произведения первых двух векторов, и распишем третий вектор через базисные:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}\right)(c_1\vec{\imath} + c_2\vec{\jmath} + c_3\vec{k}).$$

Умножим скалярно эти суммы и раскроем скобки.

Учтем то, что базисные векторы ортогональны:

$$\vec{\imath}\vec{\jmath} = \vec{k}\vec{\imath} = \vec{\jmath}\vec{k} = 0,$$

а квадраты базисных векторов дадут 1:

$$\vec{\imath}^2 = \vec{\jmath}^2 = \vec{k}^2 = 1.$$

После раскрытия скобок из девяти слагаемых шесть будут равны 0, останутся трое слагаемых:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}\right)(c_1\vec{\imath} + c_2\vec{\jmath} + c_3\vec{k}) =$$

$$= c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Полученное выражение является разложением определителя третьего порядка по первой строке:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе первая строка – это координаты третьего вектора $\vec{c}$. Однако если поменять местами сначала первую и вторую строки, а затем – вторую и третью строки, получится указанный в теореме определитель:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что двукратная смена строк в определителе не изменит его. Как следствие, $\vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Если же поменять местами только два вектора, определитель сменит знак на противоположный. Оформим это и некоторые другие важные свойства смешанного произведения в виде теоремы.

Теорема. Верны следующие свойства:

1. *При циклической перестановке множителей (рис. 24) смешанное произведение не изменится*:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

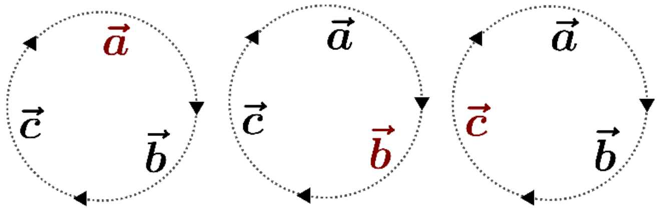

Рис. 24

2. Если поменять местами только два множителя, смешанное произведение меняет знак:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}.$$

3. *Числовой коэффициент можно вынести из любого множителя смешанного произведения*:

$$(r\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(r\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(r\vec{c}) = r\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right).$$

4. *Для смешанного произведения справедлив аналог дистрибутивного закона, то есть справедливы равенства, позволяющие раскрывать скобки, при этом суммой может являться любой множитель*:

$$(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2})\vec{b}\vec{c} = \overrightarrow{a_1}\vec{b}\vec{c} + \overrightarrow{a_2}\vec{b}\vec{c},$$
$$\vec{b}(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2})\vec{c} = \vec{b}\overrightarrow{a_1}\vec{c} + \vec{b}\overrightarrow{a_2}\vec{c}$$
$$\vec{b}\vec{c}(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) = \vec{b}\vec{c}\overrightarrow{a_1} + \vec{b}\vec{c}\overrightarrow{a_2}.$$