Лекция 12.

Скалярное произведение векторов

На лекции введем понятия скалярного произведения двух векторов.

Вначале уточним, что понимается под углом между векторами.

Углом между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ считаем величину меньшего угла, на который можно повернуть один из векторов до положения сонаправленности с другим вектором (рис. 1).

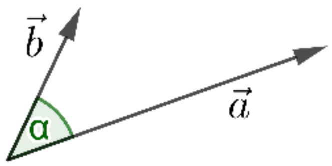

Рис. 1

Значение угла с нулевым вектором можно взять любым.

Далее будем работать с косинусом угла между векторами:

$$\text{угол } \vec{a}\hat{}\vec{b} \rightarrow \text{знак } \cos(\vec{a}\hat{}\vec{b}).$$

Рассмотрим различные случаи.

Если векторы сонаправлены (рис. 2), то угол между ними 0°, значит, косинус равен 1: $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$ $(\alpha = 0) \rightarrow \cos\alpha = 1$.

Рис. 2

Для острого угла (рис. 3) косинус положителен $(\alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\alpha > 0)$, для прямого угла косинус равен 0 $(\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\alpha = 0)$, для тупого угла косинус отрицателен $(\alpha > \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\alpha < 0)$.

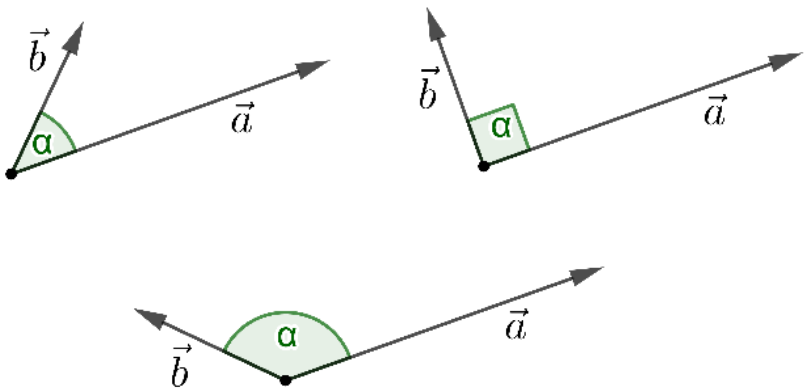

Рис. 3

Если же векторы противоположно направлены (рис. 4), то, отложив их от одной точки, получим развернутый угол, косинус такого угла равен (–1) ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ $(\alpha = \pi) \rightarrow \cos\alpha = -1$).

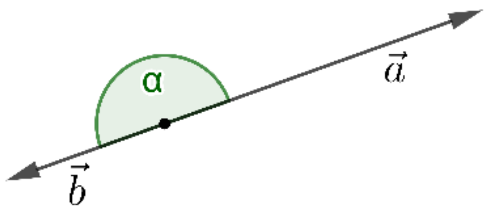

Рис. 4

Мы знаем, что с векторами можно выполнять ряд операций, в частности, складывать, и умножать на число. Проиллюстрируем использование этих операции в физике, где векторы находят широкое применение.

Операции сложения и вычитания векторов сопоставляют двум векторам вектор. Так, если на тело действуют несколько сил (а сила – это векторная величина), то удобно рассмотреть результирующую силу, то есть сумму всех сил, действующих на тело. Так, если на тело действуют силы, заданные векторами $\overrightarrow{f_1}$ и $\overrightarrow{f_2}$, то при замене их суммой $\vec{f} = \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2}$ (рис. 5) движение тела не претерпит никаких изменений.

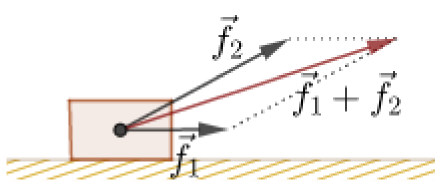

Рис. 5

Операция умножения вектора на число по числу и вектору задает вектор. Например, по вторему закону Ньютона сила равна произведению массы на ускорение (рис. 6), или в равносильной формулировке, ускорение равно силе, умноженной на число, обратное массе: $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{f}$.

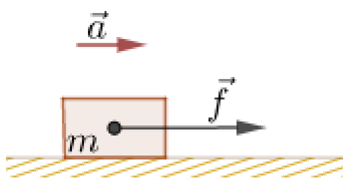

Рис. 6

Познакомимся с операцией, которая двум векторам сопоставляет число, то есть скалярную величину. Допустим, на тело действует сила $\vec{f}$, при этом тело совершает перемещение на некоторый вектор $\vec{s}$ (рис. 7).

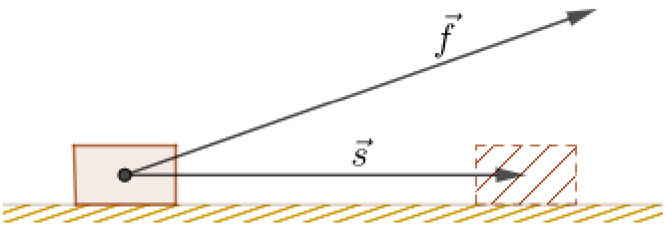

Рис. 7

В результате совершается некоторая работа, которая является скалярной величиной. Говорят, что работа равна скалярному произведению силы на перемещение.

Разберемся, как определить это значение работы. Работа должна зависеть от величины силы (то есть от приложенного усилия), от величины перемещения, то есть от величины сдвига тела (если тело осталось в покое, то результата нет, работа равна 0), а также от угла между векторами силы и перемещения, который характеризует взаимное расположение векторов силы и перемещения. Работой силы $\vec{f}$ называют произведение модулей векторов силы и перемещения, умноженных на косинус угла между ними:

$$A = |\vec{f}||\vec{s}|cos\alpha.$$

Чем больше усилий прилагается к телу, тем бóльшая работа совершается. Аналогичная зависимость от длины перемещения: чем дальше передвинуто тело, тем бóльшая работа совершена. Обращаю внимание: работа – скалярная величина, то есть число, а не вектор. Двум векторам (силе и перемещению) сопоставляется число – работа данной силы.

Итак, по указанному правилу любым двум векторам можно сопоставить число, называемое скалярным произведением (или скалярным умножением) данных векторов:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos(\vec{a}\wedge\vec{b}).$$

Отметим простейшие следствия этого определения. Величина угла между векторами задает знак косинуса этого угла, и этот знак совпадает со знаком произведения векторов.

Скалярное произведение сонаправленных векторов равно произведению их длин:

$$\vec{a} \upuparrows \vec{b}\ (\alpha = 0) \Leftrightarrow ab = |a||b|.$$

Если угол между векторами острый, произведение ***a*** на ***b*** больше 0:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ab > 0.$$

Для ортогональных векторов произведение равно 0:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow ab = 0.$$

Если угол тупой, скалярное произведение меньше 0:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ab < 0.$$

При максимальном угле 180^{o} (то есть векторы противоположно направлены), их произведение противоположно произведению их длин:

$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}\ (\alpha = \pi) \Leftrightarrow ab = -|a||b|.$$

Самые важные свойства скалярного произведения соберем в теорему.

Теорема. *Скалярное умножение векторов обладает следующими свойствами*:

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$,

2) $(r\vec{a})\vec{b} = r(\vec{a}\vec{b})$,

3) $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|$, или $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, или $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$

4) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.

Первое свойство ($\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$) означает, что операция коммутативна, то есть порядок множителей не существенен, это очевидно следует из определения.

Так же из определения получаем, что коэффициент r можно вынести за скобки скалярного произведения ($(r\vec{a})\vec{b} = r(\vec{a}\vec{b})$).

В третьем свойстве вектор умножен на себя. Такое произведение называют скалярным квадратом вектора. Так как равные векторы сонаправлены, косинус угла между ними равен 1. Поэтому скалярный квадрат вектора будет равен квадрату его длины. Отсюда легко выразить длину вектора через его скалярный квадрат как $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Четвертое свойство позволяет раскрывать скобки, то есть умножать вектор на сумму векторов. Говорят, что операция скалярного умножения дистрибутивна относительно сложения. Из этого свойства можно сформулировать **следствие** с физическим контекстом: *при действии на тело нескольких сил работа результирующей силы равна сумме работ этих сил*:

$$(\vec{f_1} + \vec{f_2})\vec{s} = \vec{f_1}\vec{s} + \vec{f_2}\vec{s}.$$

Применим рассмотренные свойства для того чтобы научиться вычислять скалярное произведение, зная координаты векторов.

Пусть на плоскости задана некоторая ПДСК, в которой описаны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначим координаты вектора $\vec{a}$ через a_1, a_2, координаты вектора $\vec{b}$ – через b_1, b_2.

Разложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по базисным векторам $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, и найдем их скалярное произведение:

$$\vec{a}\vec{b} = (a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath})(b_1\vec{\imath}+b_2\vec{\jmath}).$$

По четвертому свойству раскроем скобки:

$$\vec{a}\vec{b} = (a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath})(b_1\vec{\imath}+b_2\vec{\jmath}) = a_1b_1\vec{\imath}^2 + a_2b_2\vec{\jmath}^2 + a_1b_2\vec{\imath}\vec{\jmath} + a_2b_1\vec{\imath}\vec{\jmath}.$$

Вспомним, что базисные векторы имеют единичную длину и ортогональны. Поэтому их скалярное произведение равно 0, что обнулит два последних слагаемых. Во-вторых, квадрат $\vec{\imath}$ – это квадрат его длины, то есть 1, аналогично, квадрат $\vec{\jmath}$ – тоже 1. Получим:

$$\vec{a}\vec{b} = (a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath})(b_1\vec{\imath}+b_2\vec{\jmath}) = a_1b_1\vec{\imath}^2 + a_2b_2\vec{\jmath}^2 + a_1b_2\vec{\imath}\vec{\jmath} + a_2b_1\vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Значит, скалярное произведение векторов равно сумме произведений его соответствующих координат. Это важная формула, которую мы оформим в виде теоремы:

Теорема. *Пусть в ПДСК* $\vec{a}(a_1,\ a_2), \vec{b}(b_1,\ b_2)$. *Тогда*

$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Умение вычислять скалярное произведение через координаты векторов, дает возможность находить длину вектора и величину угла между двумя векторами.

Так как *длина вектора* – это корень из скалярного квадрата, то имеет место формула

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Выражая из определения скалярного произведения косинус угла, и расписывая все оставшиеся выражения через координаты, получаем *координатную формулу для вычисления угла между векторами*:

$$cos(\ \vec{a}\hat{}\vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Все указанные формулы верны не только для плоскости, но и для трехмерного пространства, единственное отличие – появляется третья координата, значит, в выражениях добавится третье слагаемое:

Теорема. *Пусть в ПДСК* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. *Тогда*

$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

$$cos(\ \vec{a}\hat{}\vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Обоснования будут точно такие же.

Теперь решим **задачу**. Вспомним, что работа равна скалярному произведению векторов силы и перемещения. *Пусть в трехмерной прямоугольной системе координат заданы координаты вектора силы* $\vec{f} = (1,2,1)$. *Вычислим работу этой силы при перемещении тела на вектор* $\vec{s} = (0,\ 3,\ 2)$.

Используя координатную формулу, находим скалярное произведение данных векторов:

$$A = \vec{f}\vec{s} = f_1 s_1 + f_2 s_2 + f_3 s_3 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 8.$$

Получаем значение работы: $A = 8$ Дж.

Получим формулу, связывающую косинусы углов между фиксированным вектором и базисными векторами.

Рассмотрим плоскость, зададим ПДСК (рис. 8).

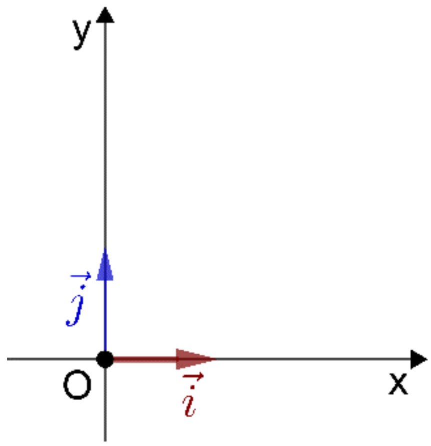

Рис. 8

Каждый ненулевой вектор $\vec{a}$ задает два угла: $\vec{a} \neq \vec{0} \leftrightarrow \vec{a}^\wedge\vec{\imath}, \vec{a}^\wedge\vec{\jmath}$ (рис. 9).

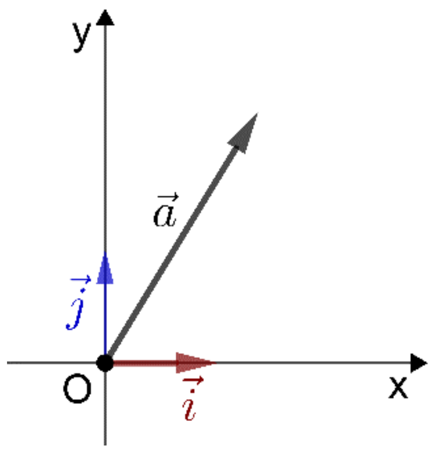

Рис. 9

Косинусы углов $\vec{a}^\wedge\vec{\imath}$ и $\vec{a}^\wedge\vec{\jmath}$ называются направляющими косинусами.

Напомним:

$$\vec{a}(a_1,\ a_2), \vec{b}(b_1,\ b_2\ ) \Longrightarrow cos(\ \vec{a}^\wedge\vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Учитывая, что базисные векторы имеют единичную длину и координаты (1, 0) и (0, 1), получаем:

1) косинус угла $\alpha = \vec{a}^\wedge\vec{\imath}$ равен отношению первой координаты к длине вектора $\vec{a}$ (рис. 10):

$$\cos(\vec{a}^\wedge\vec{\imath}) = \frac{a_1}{|a|},$$

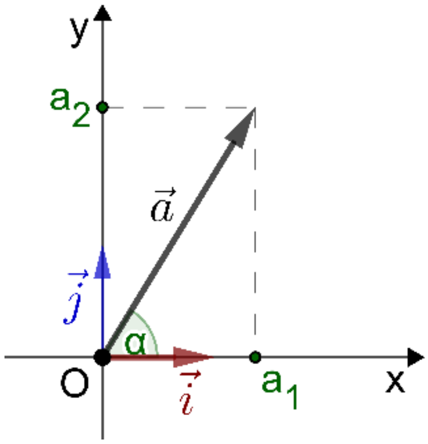

Рис. 10

2) косинус угла $\beta = \vec{a}\hat{}\vec{j}$ – отношению второй координаты к длине $\vec{a}$ (рис. 11):

$$\cos(\vec{a}\hat{}\vec{j}) = \frac{a_2}{|a|}.$$

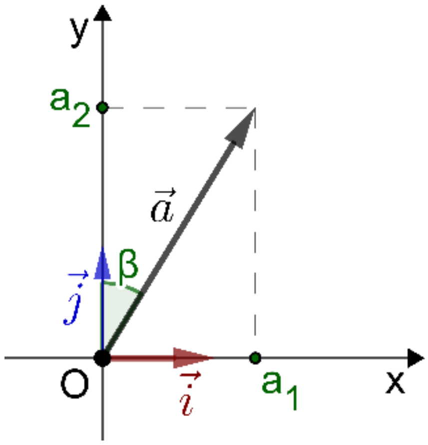

Рис. 11

Аналогичные формулы имеют место для трехмерного пространства.

Возведем полученные равенства в квадрат и сложим.

$$\cos^2(\vec{a}\hat{}\vec{i}) + \cos^2(\vec{a}\hat{}\vec{j}) = \frac{a_1^2}{|a|^2} + \frac{a_2^2}{|a|^2} = \frac{|a|^2}{|a|^2} = 1.$$

Итак, *сумма квадратов направляющих косинусов вектора* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *равна* 1.

Выведем формулу, позволяющую выразить площадь параллелограмма и треугольника, построенных на заданных векторах (рис. 12), через их скалярное произведение.

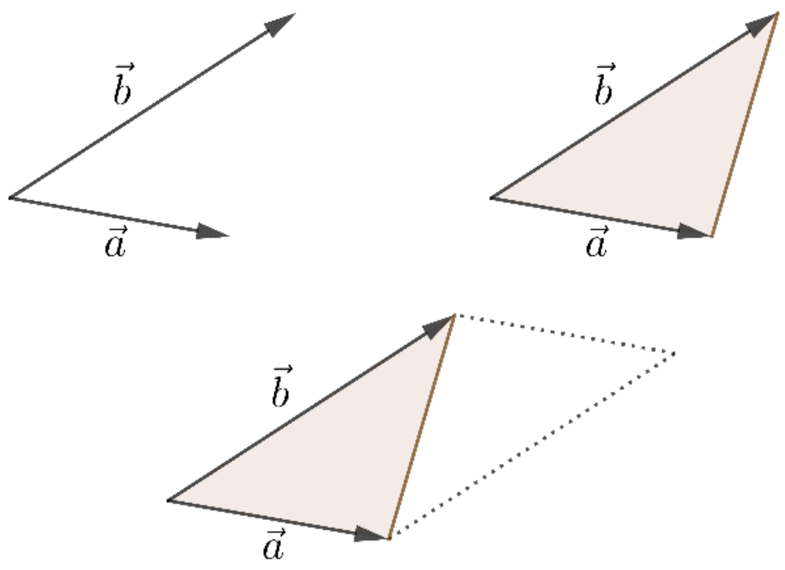

Рис. 12

По известной формуле, площадь параллелограмма равна половине произведения длин смежных сторон на синус угла между ними:

$$S_{\text{пар.}} = |\vec{a}||\vec{b}|sin\alpha.$$

Возведем это равенство в квадрат:

$$S_{\text{пар.}} = |\vec{a}||\vec{b}|sin\alpha \Longrightarrow S_{\text{пар.}}^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 sin^2\alpha\,.$$

Запишем площадь как квадратный корень из правой части:

$$S_{\text{пар.}} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \sin^2\alpha}\,.$$

Выразим квадрат синуса через квадрат косинуса:

$$S_{\text{пар.}} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \sin^2\alpha} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1 - cos^2\alpha)}.$$

Под знаком квадратного корня получили два выражения: произведение квадратов длин векторов, и квадрат скалярного произведения:

$$S_{\text{пар.}} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1 - cos^2\alpha)} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 cos^2\alpha}.$$

Учитывая, что квадрат длины вектора равен его скалярному квадрату, под знаком корня возникнет следующее выражение: разность произведения скалярных квадратов векторов и квадрата их скалярного произведения:

$$S_{\text{пар.}} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 cos^2\alpha} = \sqrt{(\bar{a})^2 \cdot (\bar{b})^2 - (\bar{a}\bar{b})^2}.$$

Итак, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна

$$S_{\text{пар.}} = \sqrt{(\bar{a})^2 \cdot \left(\bar{b}\right)^2 - (\bar{a}\bar{b})^2}.$$

Площадь соответствующего треугольника равна половине площади этого параллелограмма, поэтому

$$S_{\text{тр.}} = \frac{1}{2}\sqrt{(\bar{a})^2 \cdot \left(\bar{b}\right)^2 - (\bar{a}\bar{b})^2}.$$