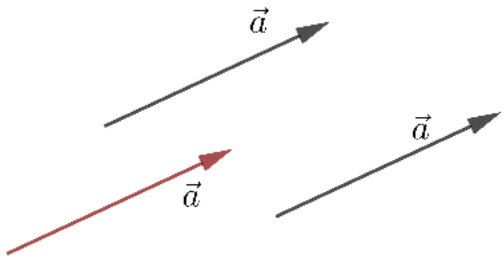
Декартова система координат

Вектор в геометрии – это объект, определяемый направлением и длиной. Изображается вектор направленным отрезком. Вектор можно отложить от любой точки.



E$_2$ – обозначение множества всех векторов, параллельных некоторой плоскости.

E$_3$ – обозначение множество всех векторов пространства.

Линейная зависимость векторов: Два или более векторов называются линейно зависимыми, если среди них есть вектор, являющийся линейной комбинацией остальных векторов. Система, состоящая из одного нулевого вектора, также считается линейно зависимой.

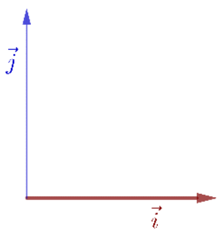
Линейная независимость векторов: Если векторы не являются линейно зависимыми, они называются линейно независимыми.

Базис системы векторов – это такая линейно независимая подсистема, через которую выражается любой вектор данной системы.

Координаты вектора в этом базисе – коэффициенты разложения этого вектора по этому базису. Для базиса $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ двумерного пространства получаем пару координат: $\vec{a} = r_1\overrightarrow{e_1} + r_2\overrightarrow{e_2} \leftrightarrow (r_1, r_2)$. Для базиса e_1, e_2, e_3 трехмерного пространства – тройку координат: $\vec{a} = r_1\overrightarrow{e_1} + r_2\overrightarrow{e_2} + r_3\overrightarrow{e_3} \leftrightarrow (r_1, r_2, r_3)$.

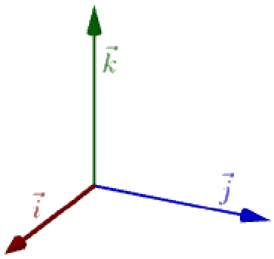
Ортогональные (или перпендикулярные) векторы – векторы $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$, угол между которыми 90°: $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$.

Ортонормированный базис – базис из ортогональных векторов, длины которых равны. В E$_2$ это пара векторов $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$: $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$, $|\vec{\imath}| = 1$, $|\vec{\jmath}| = 1$.

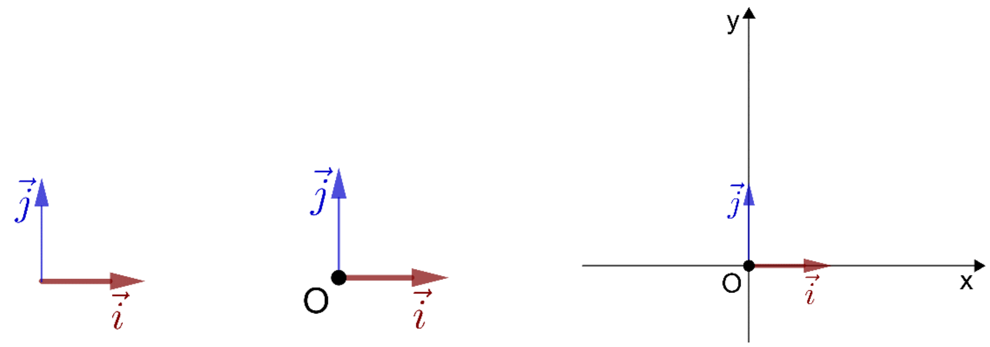


В пространстве E$_3$ это три попарно ортогональных единичных вектора $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$

$(|\vec{i}| = 1,\ |\vec{j}| = 1,\ |\vec{k}| = 1)$.



Прямоугольная система координат в E₂ (ПДСК) – система координат, построенная следующим образом: берем ортонормированный базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, фиксируем точку O (начало координат), от которой откладываем векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Каждый из базисных векторов задает свою ось координат.



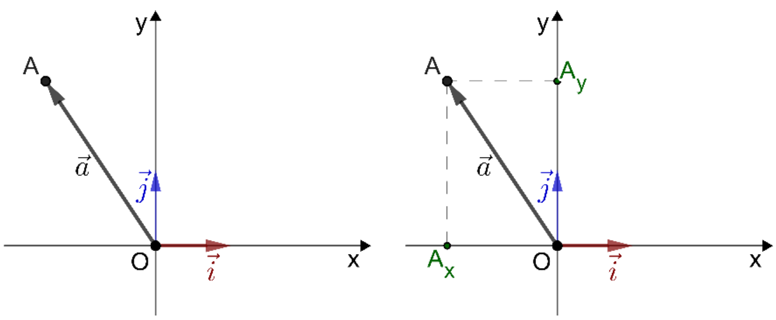
Ось абсцисс – ось ПДСК, направленная вдоль вектора $\vec{i}$, обозначается как Ox.

Ось ординат – ось ПДСК, направленная вдоль вектора $\vec{j}$, обозначается через Oy.

Радиус-вектор точки A – вектор $\overrightarrow{OA}$.

Проекции точки A на оси координат Ox и Oy:

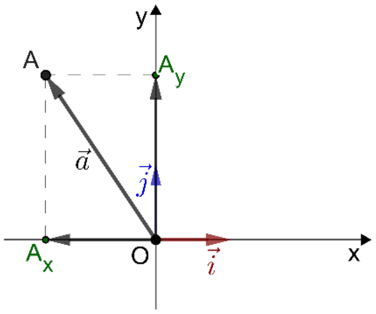
1) основания перпендикуляров A_x и A_y, опущенных из точки A на оси координат.



2) иногда так называют координаты точки $A(a_1, a_2)$:

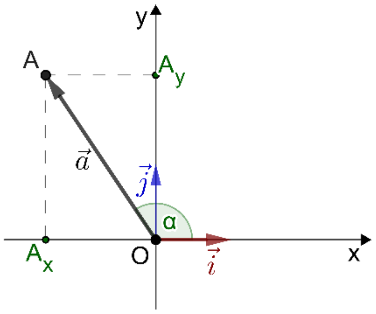
A_x задает координату $a_1 = \begin{cases} |\overrightarrow{OA_x}|, \text{если } \overrightarrow{OA_x} \uparrow\uparrow \vec{i} \\ -|\overrightarrow{OA_x}|, \text{если } \overrightarrow{OA_x} \uparrow\downarrow \vec{i} \end{cases}$, аналогично A_y задает $a_2 = \pm|\overrightarrow{OA_y}|$.

Проекции вектора $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ на оси координат Ox и Oy – 1) векторы $\overrightarrow{OA_x}$ и $\overrightarrow{OA_y}$, где A_x и A_y – проекции точки A на оси Ox и Oy.

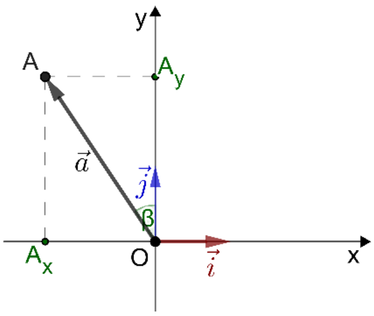


2) иногда так называют координаты a_1, a_2 точки A (вектора $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$).

Абсцисса точки A – первая координата точки A; может быть найдена по формуле $a_1 = |\vec{a}|\cos(\vec{a}^\wedge Ox)$. Здесь под знаком косинуса стоит угол между вектором $\vec{a}$ и положительным направлением оси Ox



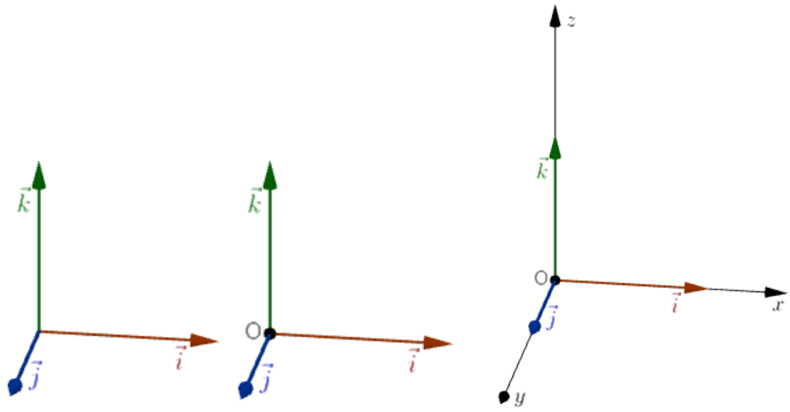
Ордината точки A – вторая координата точки A; вычисляется по аналогичной формуле $a_2 = |\vec{a}|\cos(\vec{a}^\wedge Oy)$, под знаком косинуса стоит угол между данным вектором и осью Oy.



Теорема. *Прямоугольные координаты r, s вектора $\vec{a}$ равны проекциям a_1, a_2 этого вектора на оси Ox, Oy.*

Получаем, что *координаты точки совпадают с координатами ее радиус-вектора*.

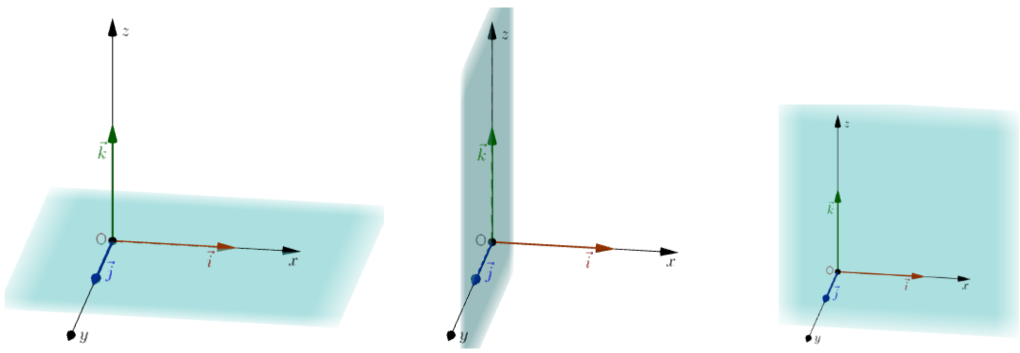
Прямоугольная система координат в E_3 (ПДСК) – система координат, построенная следующим образом: берем ортонормированный базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, фиксируем точку – начало координат, от нее откладываем базисные векторы.



Осью аппликат – третья ось ПДСК, ось Oz.

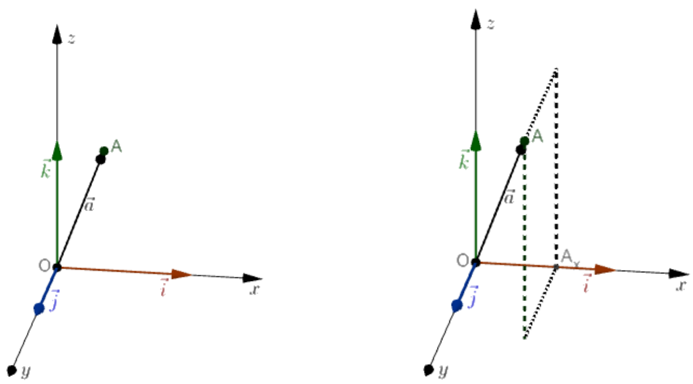
Аппликата точки A – третья координата точки A; вычисляется по аналогичной формуле $a_3 = |\vec{a}|\cos(\vec{a}\,^\wedge Oz)$.

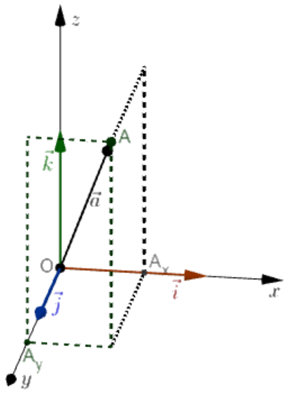
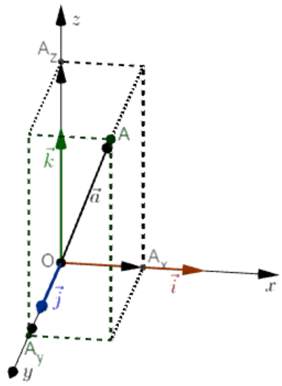
Координатные плоскости – плоскости (Oxy), (Oyz) и $(\mathrm{O}xz)$, которые образуют каждые две оси ПДСК.



Проекции точки A на оси координат Ox, Oy и Oz:

1) точки A_x, A_y и A_z пересечения с осями плоскостей, проходящих через точку A, перпендикулярно соответствующей оси.



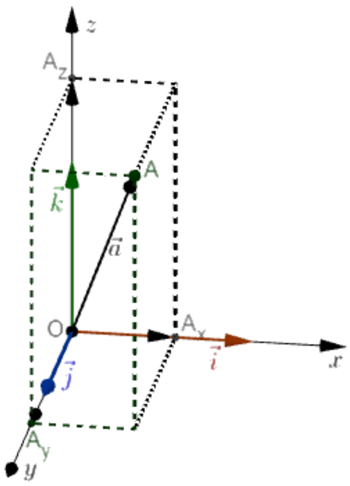



2) иногда так называют координаты $a_1,\ a_2,\ a_3$ точки А:

A_x задает координату $a_1 = \begin{cases} |\overrightarrow{OA_x}|, \text{если } \overrightarrow{OA_x} \uparrow\uparrow \vec{\imath} \\ -|\overrightarrow{OA_x}|, \text{если } \overrightarrow{OA_x} \uparrow\downarrow \vec{\imath} \end{cases}$, аналогично A_y задает

$a_2 = \pm|\overrightarrow{OA_y}|$ и $a_3 = \pm|\overrightarrow{OA_z}|$.

Проекции вектора $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ на оси координат Ox и Oy и Oz – 1) векторы $\overrightarrow{OA_x}, \overrightarrow{OA_y}$ и $\overrightarrow{OA_z}$, где A_x, A_y и A_z – проекции точки А на оси Ox, Oy и Oz.



2) иногда так называют координаты $a_1,\ a_2,\ a_3$ точки A (вектора $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$).

Теорема. *Прямоугольные координаты $r,\ s,\ l$ вектора $\vec{a}\ (r,\ s,\ l)$ равны проекциям этого вектора на оси $Ox,\ Oy,\ Oz$.*

Получаем, что *координаты точки равны координатам ее радиус-вектора.*

Как в любом векторном пространстве, в геометрических пространствах E_2 и E_3 выполняется

Теорема. *При сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.*

Теорема. *Пусть у вектора $\overrightarrow{MN}$ известны координаты его начальной и конечной точки. Тогда координаты вектора находятся по простому правилу:*

надо из координат точки N вычесть соответствующие координаты точки M. Это правило справедливо и для плоскости, и для пространства.

Теорема. *Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат концов этого отрезка.*

Теорема. *Векторы линейно зависимы в точности тогда, когда матрица их координат вырождена.*

Для плоскости *два вектора коллинеарны в точности тогд*а, *когда определитель, составленный из их координат, равен 0*:

$$\vec{a}(a_1,\, a_2)||\vec{b}(b_1,\, b_2) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

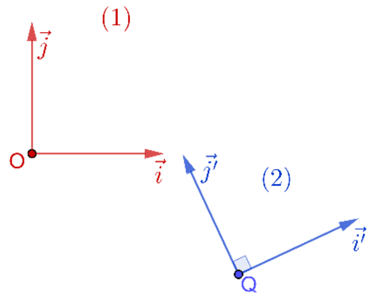
$$\Leftrightarrow \text{ координаты } (a_1,\, a_2),\ (b_1,\, b_2) \text{ пропорциональны.}$$

Для пространства:

$$\vec{a}(a_1,\, a_2,\, a_2),\, \vec{b}(b_1,\, b_2,\, b_2),\, \vec{c}(c_1,\, c_2,\, c_2) \text{ компланарны} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

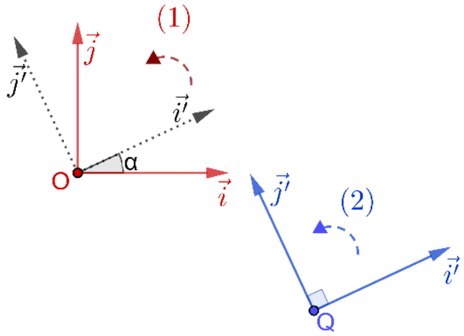
Рассмотрим далее связь координат точки в разных СК.



Пусть даны две ПДСК.

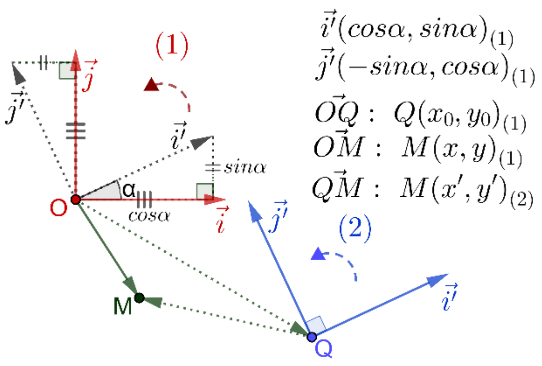
Первая ПДСК задана базисом $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ и точкой O, вторая – базисом $\vec{\imath'}, \vec{\jmath'}$ и точкой Q: (1) $O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$ и (2) $Q,\ \overrightarrow{\imath'}, \vec{\jmath'}$.

Взаимное расположение базисов в СК (1) и (2) определяется углом $\alpha = \vec{\imath}^\wedge \vec{\imath'}$ между первыми векторами этих базисов, отложенным в том же направлении,



в котором ориентирована СК (1).

Пусть точка Q в СК (1) имеет координаты $(x_0,\ y_0)$. Возьмем произвольную точку M и обозначим ее координаты в СК (1) через (x, y), в СК (2) – через (x', y').

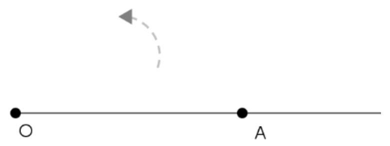


Получаем:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & e(-\sin\alpha) \\ \sin\alpha & e\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} x = x_0 + x'\cos\alpha - ey'\sin\alpha \\ y = x_0 + x'\sin\alpha + ey'\cos\alpha \end{cases}.$$

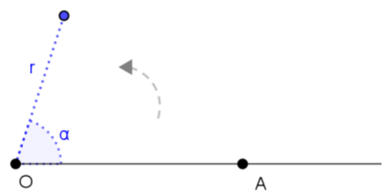
где $e = \begin{cases} 1 & \text{для одинаковой ориентации} \\ -1 & \text{для разной ориентации базисов} \end{cases}.$

Полярная система координат – система координат, которая задается точкой (полюсом), лучом с началом в точке O (называемой полярной осью), положительной ориентацией (обычно против часовой стрелки).

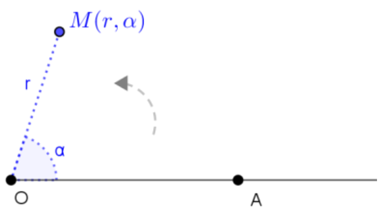


Полярный радиус точки M – длина r вектора $\overrightarrow{OM}$. Полярный радиус полюса считается равным 0.

Полярный угол – ориентированный угол α между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$, определяется с точностью до полного оборота круга 2π. Полярный угол полюса не определен (можем считать любым).

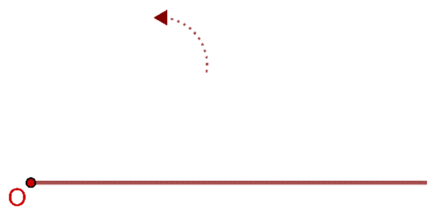


Полярные координаты точки М – пара чисел $(r,\ \alpha)$, однозначно определяющих точку М в полярной СК.

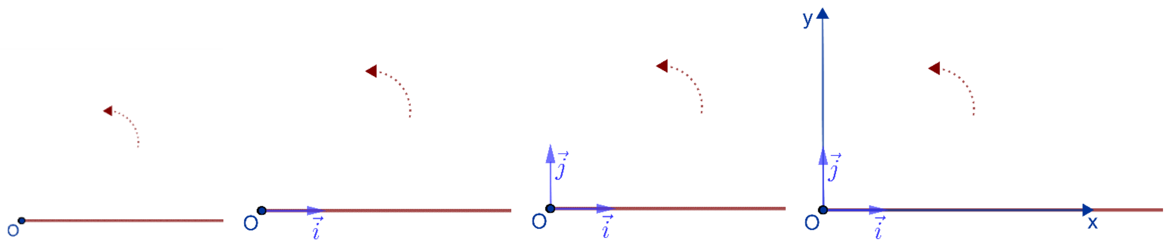


Укажем возможный переход от полярной системы координат к ПДСК.

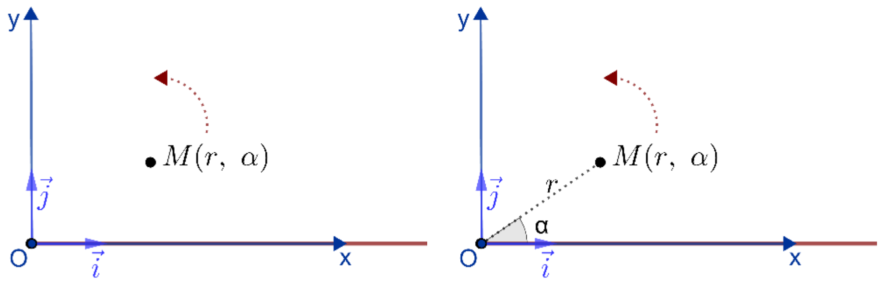
Пусть задана полярная система.



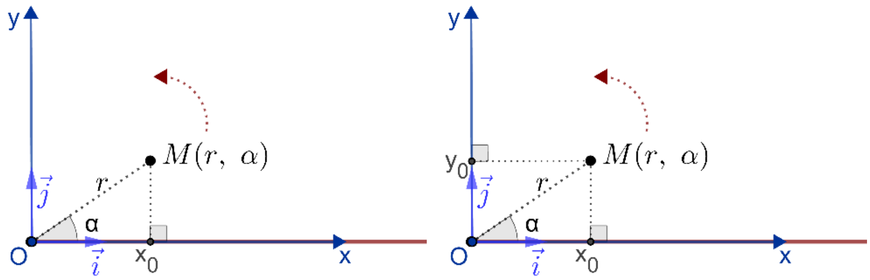
Зададим ПДСК, соответствующую данной ПСК: за начало координат выберем полюс, базисный вектор $\vec{\imath}$ определим, направив его вдоль полярной оси, вектор $\vec{\jmath}$ получается поворотом $\vec{\imath}$ на 90°.



Возьмем точку М с полярными координатами $(r,\ \alpha)$.



Ее прямоугольные координаты $M(x_0,\ y_0)$.



Получаем: $x_0 = r \cdot cos\alpha$ и $y_0 = r \cdot sin\alpha$.

Обратно: $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $r \neq 0 \Rightarrow cos\,\alpha = \frac{x_0}{r}$, $sin\,\alpha = \frac{y_0}{r}$.