Прямоугольная система координат

Задача 1. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$, если $A(0,\ 2,\ 1)$, $B(-1,\ -2,\ 1)$, $C(3,\ -4,\ 5)$, $D(1,\ 0,\ 3)$.

Решение. Найдем координаты векторов–слагаемых:

$$\overrightarrow{AB}(-1;\ -4;0),\ \overrightarrow{CD}(-2;\ 4;-2).$$

Тогда $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ имеет координаты

$$(-1-2;\ -4+4;0-2)=(-3;0;\ -2).$$

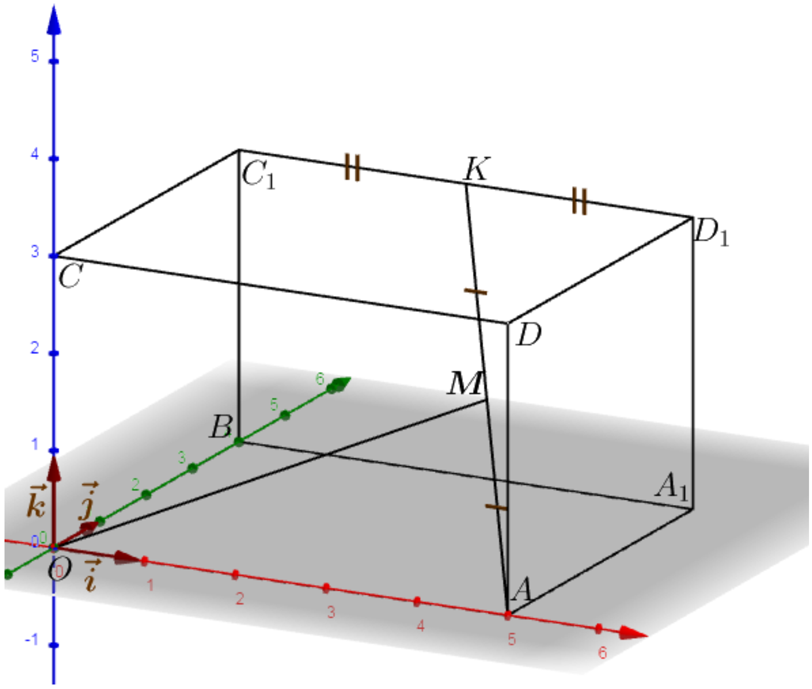
Ответ. $(-3;0;\ -2)$.

Задача 2. Дан прямоугольный параллелепипед со сторонами $3,\ 4,\ 5$.

Задана прямоугольная система координат.

K – середина C_1D_1, M – середина AK.

Найти координаты векторов $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OD_1}$ и точки M.



Решение. Координаты вектора – это коэффициенты разложения этого вектора по базисным векторам. Вначале найдем координаты $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OD}$.

$\overrightarrow{OA}=5\vec{\imath}=5\vec{\imath}+0\vec{\jmath}+0\vec{k}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{OA}(5;0;0).$

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=5\vec{\imath}+3\vec{k}=5\vec{\imath}+0\vec{\jmath}+3\vec{k}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{OD}(5;0;3).$

Определим координаты вектора $\overrightarrow{OD_1}$. Для этого можно показать, что $\overrightarrow{OD_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Найдем проекции точки D_1 на оси координат. Так как дан прямоугольный параллелепипед, то точки A, B, C будут являться требуемыми проекциями точки D_1. Итак, $\overrightarrow{OD_1}=5\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+3\vec{k}$, то есть $\overrightarrow{OD_1}(5;4;3)$.

Разложим $\overrightarrow{OK}$ по базисным векторам: $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1K} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}$. Так как $\overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{OA}$, то $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = 4\vec{j} + 3\vec{k} + \frac{1}{2} \cdot 5\vec{i} = 2{,}5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

Значит, $\overrightarrow{OK}(2{,}5; 4; 3)$.

Координаты точки K – это координаты его радиус–вектора $\overrightarrow{OK}$.

Точка M – середина отрезка AK, где $A(5; 0; 0)$, $K(2{,}5; 4; 3)$. По формуле для координат середины отрезка находим координаты точки M:

$$\left(\frac{5+2{,}5}{2}; \frac{0+4}{2}; \frac{0+3}{2}\right) = (3{,}75; 2; 1{,}5).$$

Ответ. $\overrightarrow{OK}(2{,}5; 4; 3)$, $\overrightarrow{OA}(5; 0; 0)$, $\overrightarrow{OD}(5; 0; 3)$, $\overrightarrow{OD_1}(5; 4; 3)$, $M(3{,}75; 2; 1{,}5)$.

Задача 3. Выяснить, компланарны ли векторы

$\vec{a} = (1,8,3)$, $\vec{b} = (3,2,-5)$, $\vec{c} = (1,-3,-4)$.

Решение. Векторы компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы. Это в свою очередь равносильно тому, что матрица, составленная из координат данных векторов, является вырожденной. Составим эту матрицу и вычислим ее определитель. Выполним элементарные преобразования строк и воспользуемся свойствами определителя:

$$|A| = \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} -3I \\ -I \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 0 & -22 & -14 \\ 0 & -11 & -7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -2II \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -7 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как определитель равен 0, то матрица вырожденная. Следовательно, данные векторы компланарны.

Ответ. Да, компланарны.

Задача 4. Дан треугольник OAB. На стороне AB расположена точка M так, что $|AM| : |MB| = \lambda$. Найдите вектор $\overrightarrow{OM}$, если $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Решение. Выразим $\overrightarrow{OM}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

По правилу треугольника $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \overrightarrow{AM}$. Так как $AM = \lambda \cdot MB$ и векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ сонаправлены, то $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$. Поэтому $\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$.

Разложим $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = \vec{b} - \overrightarrow{OM}$. Подставим в предыдущее равенство и выразим $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \lambda \cdot \left(\vec{b} - \overrightarrow{OM}\right) = \vec{a} + \lambda\vec{b} - \lambda\overrightarrow{OM} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OM} + \lambda\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \lambda\vec{b} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \overrightarrow{OM}(1+\lambda) = \vec{a} + \lambda\vec{b} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OM} = \frac{\vec{a}+\lambda\vec{b}}{1+\lambda}.$$

Представим $\overrightarrow{OM}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}\vec{a} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{b}.$$

В частности, если M – середина отрезка AB, параметр λ равен 1, и мы получаем известное равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Так как $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, они образуют базис на плоскости. Можно сказать, что в этом базисе вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет координаты $\left(\frac{1}{1+\lambda}; \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$.

Ответ. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}\vec{a} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{b}$.