Определения 9.

Определители квадратных матриц

Правило Крамера для СЛУ $\begin{cases} ax+by=k \\ cx+dy=r \end{cases}$ – выражение решений системы по формулам: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$, где $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$, $\Delta_x=\begin{vmatrix} k & b \\ r & d \end{vmatrix}=kd-br$ и $\Delta_y=\begin{vmatrix} a & k \\ c & r \end{vmatrix}=ar-kc$.

Определитель матрицы первого порядка, составленной из одного элемента равен этому числу: $|a|=|(a)|=a$.

Определитель матрицы второго порядка – число $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$.

Определитель матрицы третьего порядка – число, которое вычисляется по следующей формуле: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & t \end{vmatrix}=ayt+bzu+cxv-(cyu+azv+bxt)$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} (обозначается A_{ij}) назовем определитель матрицы, полученной вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца, в которых находится элемент, с учетом знака: перед полученным определителем ставится либо «плюс», либо «минус», в зависимости от четности суммы индексов. Знак «минус» возникает при нечетной сумме индексов.

Определитель квадратной матрицы n-го порядка – это число, равное сумме, в которой каждое слагаемое есть произведение элемента первой строки на его алгебраическое дополнение (вычисление разложением по строке):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+\cdots+a_{1n}\cdot A_{1n}.$$

Свойства определителей произвольного порядка.

1. Если квадратную матрицу транспонировать, то есть взаимно поменять строки на столбцы, то ее определитель не изменится.
2. Определитель можно разложить по любой строке, не только по первой.

При умножении одной строки матрицы на число k, определитель этой матрицы умножается на число k.

Если в определителе есть нулевая строка, то сам определитель будет равен 0.

3. Если к одной строке определителя прибавить другую, умноженную на число, то определитель не изменится.

Если в определителе есть две одинаковые строки, то он равен 0.

Если в определителе две строки пропорциональны, то он также равен 0.

4. Если переставить в определителе две строки местами, он поменяет знак.

5. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.