Лекция 10. Применение определителей

На лекции рассмотрим применение теории определителей при решении задач.

Дадим определение. Квадратная матрица с определителем, равным 0, называется вырожденной. Если определитель не равен 0, матрица называется невырожденной.

Имеет место

Теорема. *Матрица А является невырожденной тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих утверждений*:

1) *строки* (*столбцы*) *этой матрицы линейно независимы*;

2) *матрица А имеет обратную*;

3) *система уравнений с основной матрицей А имеет единственное решение*.

Решим несколько задач, в которых воспользуемся указанными критериями невырожденной матрицы.

Задача 1. При каком k геометрические векторы, заданные координатами $(1,0,k)$, $(1,-1,0)$, $(1,1,1)$ компланарны?

Вспомним, что векторы в пространстве $\mathbf{E}_3$ компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы, что равносильно, в силу предыдущей теоремы, тому, что матрица A со строками $(1,0,k)$, $(1,-1,0)$, $(1,1,1)$ является вырожденной:

Векторы в E_3 компланарны $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$ (A $-$ матрица из векторов).

Приравняем определитель этой матрицы к 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1 + k + 0) - (-k + 0 + 0) = 2k - 1.$$

$$2k-1=0. \text{ Значит, } k = \frac{1}{2}.$$

Итак, при $k = \frac{1}{2}$ векторы компланарны (рис. 1), при остальных значениях параметра – не компланарны (рис. 2).

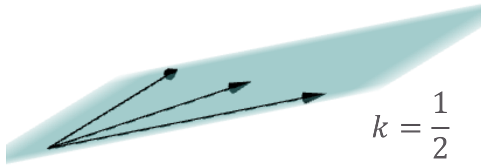

Рис. 1

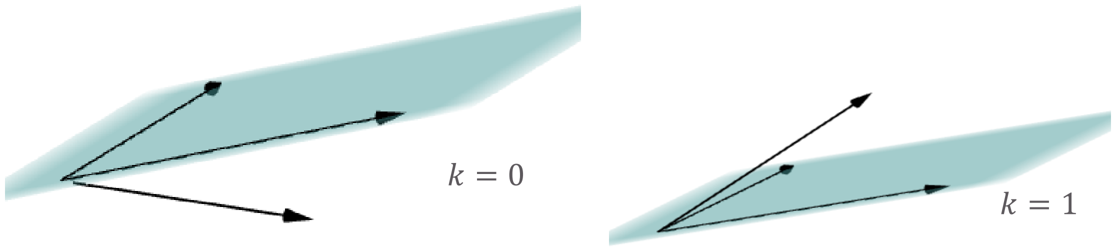

Рис. 2

Задача 2. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$. Требуется определить, сколько решений имеет эта система. Ответим на этот вопрос, не решая систему.

Так как имеем однородную систему, то нулевая тройка является ее решением, то есть эта система совместна. Получается два возможных варианта: это решение единственно, либо решений бесконечно много.

Система будет иметь одно решение, если основная матрица этой системы является невырожденной. В противном случае, система имеет бесконечно много решений. Таким образом, для ответа на вопрос задачи достаточно проверить, равен ли указанный определитель 0.

Составим определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$. Заметим, что его третий столбец равен разности первых двух столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}} \\ 2 & 1 & \\ 3 & 4 & \end{vmatrix} = 0$$

$-$

.

Значит, столбцы матрицы линейно зависимы, следовательно, матрица вырождена. Поэтому исходная система уравнений имеет бесконечно много решений.

Вспомним определение обратной матрицы. Пусть дана квадратная матрица A. Матрица называется обратной к A, если произведение этих матриц (в любом порядке) равно единичной матрице. Квадратная матрица имеет обратную в точности тогда, когда ее определитель не равен 0, то есть матрица невырожденная:

$$A \text{ имеет обратную} \Leftrightarrow |A| \neq 0.$$

Имеет место формула, позволяющая вычислять обратную матрицу. Для этого, нужно вычислить определитель исходной матрицы, и для каждого элемента посчитать его алгебраическое дополнение. При этом алгебраические дополнения элементов, стоящих в строке исходной матрицы записываются в столбец обратной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Найдем для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ обратную.

Вычислим определитель второго порядка, он равен 10:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 10.$$

Далее находим алгебраические дополнения. Вычеркивая строку и столбец, получаем матрицу первого порядка, то есть число. Не забываем поставить знак «минус» перед числом, получаемым после вычеркивания первой строки и второго столбца (при вычислении A_{12}). Также меняем знак элемента матрицы при вычислении A_{21}.

Имеем $A_{11} = 3$, $A_{12} = -4$, $A_{21} = 1$, $A_{22} = 2$.

После нахождения всех алгебраических дополнений записываем числа 3 и (–4) в первый столбец, а числа 1 и 2 – во второй столбец. Умножаем на коэффициент $\frac{1}{10}$, так как определитель матрицы A равен 10. Обратная матрица получена:

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Обсудим, каким образом умение вычислять обратную матрицу может помочь при решении некоторых систем уравнений и матричных уравнений.

Рассмотрим пример системы уравнений, основная матрица которой была только что рассмотрена: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$.

Запишем основную матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, столбец $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Так как A невырожденная (ее определитель не равен 0), система уравнений имеет одно решение, а матрица A имеет обратную (которую мы уже нашли). Перейдем к матричной форме записи данной СЛУ: $A \cdot X = B$.

Умножим матричное равенство на матрицу, обратную к A, слева и выразим X, получим $X = A^{-1} \cdot B$.

Подставим в это равенство известные матрицы A^{-1} и B, вычислим X:

$$X = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{2},\ y = 0.$$

Значит, решением системы уравнений является пара чисел $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Решим более сложное матричное уравнение.

Задача 4. Найдем неизвестную матрицу X из равенства $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Обозначим известные матрицы через A, B, E:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}_{A} X \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E}.$$

Здесь E – единичная матрица второго порядка.

Для того чтобы выразить X нужно обе части равенства умножить на обратную к A матрицу слева, и на обратную к B матрицу справа:

$$AXB = E \quad | \cdot A^{-1} \text{ слева, } \cdot B^{-1} \text{ справа}$$

$$A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}EB^{-1}$$
$$(A^{-1}A)X(BB^{-1}) = A^{-1}EB^{-1}$$
$$EXE = A^{-1}EB^{-1}$$
$$X = A^{-1}EB^{-1}.$$

Матрица A^{-1} уже найдена: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Найдем B^{-1}. Действуем по тому же алгоритму: вначале вычисляем определитель матрицы B, он равен 0,01; затем находим алгебраические дополнения; далее подставляем в формулу для обратной матрицы. Получаем:

$$B^{-1} = \frac{1}{0{,}01} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, после того как обе части исходного равенства умножить на A^{-1}, B^{-1} в указанном порядке, в левой части равенства получится неизвестная матрица X, а в правой части – произведение $A^{-1}EB^{-1}$, что равно $A^{-1}B^{-1}$. Подставляем найденные обратные матрицы и вычисляем X:

$$X = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot 10 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача решена.

Наконец, рассмотрим общие формулы, позволяющие находить решение СЛУ, в которой основная матрица является квадратной и невырожденной.

Запишем в общем виде СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Обозначим столбцы основной матрицы через A_1, A_2, …, A_n, а столбец свободных членов – как обычно через B:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & x_1 + & a_{12} & x_2 + \cdots + & a_{1n} & x_n = & b_1 \\ a_{21} & x_1 + & a_{22} & x_2 + \cdots + & a_{2n} & x_n = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & x_1 + & a_{m2} & x_2 + \cdots + & a_{mn} & x_n = & b_m \end{array}\right. \longleftrightarrow A_1\,x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = B$$

$$\begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_n & B \end{array}$$

Будем обозначать определитель матрицы, составленной из столбцов A_1, A_2, …, A_n, таким образом:

$$|A| = |A_1, A_2, \dots, A_n|.$$

Как нам уже известно, определитель основной матрицы не равен 0 (то есть A невырожденная) в точности тогда, когда соответствующая система уравнений имеет одно решение:

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \text{СЛУ имеет одно решение.}$$

Справедливы формулы, позволяющие вычислять это решение посредством вычисления определителей, составленных по определенным правилам из столбцов A_i и B.

Итак,

Теорема. *Пусть дана СЛУ с невырожденной основной матрицей A. Тогда эта система имеет единственное решение* $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, *каждая координата которого вычисляется по формуле:*

$$c_i = \frac{|A_1, \ldots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \ldots, A_n|}{|A|} = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Чтобы найти c_1 надо вычислить определитель Δ_1, получающийся заменой первого столбца основной матрицы на столбец B свободных членов. Тогда $c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, где Δ – определитель исходной матрицы A.

Аналогично, для нахождения c_2 вычисляем определитель Δ_2, получающийся заменой второго столбца матрицы A на столбец B. Тогда $c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. И так далее, вычисляем все c_i.

Описанные формулы для нахождения решений системы линейных уравнений называются формулами Крамера. Их можно применять только тогда, когда матрица A невырожденная.

Задача 5. Решим систему $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$ по формулам Крамера.

Вначале вычислим определитель основной матрицы:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Для этого применим элементарные преобразования: ко второй строке прибавим первую, а из третьей строки вычтем две первых. Получим треугольную матрицу, ее определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, то есть 2:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +I \\ -2I \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Далее составим определитель Δ_1. В нем первый столбец – это столбец свободных членов, а остальные столбцы взяты из основной матрицы. Этот определитель равен 0, так как первый и третий столбцы пропорциональны:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Составим Δ_2. Здесь столбец свободных членов запишется вторым номером. Снова имеем два пропорциональных столбца (второй и третий), значит, Δ_2 также равен 0:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Составим Δ_3. Применим элементарные преобразования и вычислим этот определитель:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +I \\ -2I \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

По формулам Крамера находим решение: так как Δ_1 и Δ_2 равны 0, то $x_1 = 0,\ x_2 = 0$. Значение x_3 равно $\frac{\Delta_3}{\Delta}$, то есть $x_3 = \frac{4}{2} = 2$.

Итак, тройка (0; 0; 2) является единственным решением исходной системы уравнений.