Определители квадратных матриц

Задача 1. Вычислите определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ разными способами:

а) разложив по первой строке;

б) по схеме для определителей третьего порядка;

в) с использованием элементарных преобразований.

Решения

а) $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 3(6+2) - 9(3-2) + 2(2+4) = 3 \cdot 8 - 9 + 12 = 27.$

б) Например, применяем правило треугольников.

в) $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3II \\ \\ +2II \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$

Далее можно разложить по первому столбу, так как в нем все элементы, кроме одного, нули. Получим:

$0 + (-1) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 0 = -(3-30) = 27.$

Можно привести к треугольному виду. Для этого вначале поменяем первые две строки местами:

$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2II \end{matrix} =$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -1 \cdot 3 \cdot (-9) = 27.$

Ответ. 27.

Задача 2. Вычислите определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ разными способами:

а) разложив по второй строке;

б) с использованием элементарных преобразований.

Решение

а) Вторая строка предпочтительнее первой, так как в ней есть 0. Поэтому последнее слагаемое в разложении обнулится и соответствующее алгебраическое дополнение вычислять не нужно:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}}_{A_{21}} + 0 - 4 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}}_{A_{23}=0} + 2 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}}_{A_{24}=0}.$$

Определитель A_{24} равен 0, так как в нем строки 2 и 3 пропорциональны (другие варианты обоснования того, что определитель равен 0: вычитая из третьей строки 1,5 вторых строки, получим нулевую строку; или, поделив вторую строку на 2, а третью строку – на 3, получим одинаковые строки).

Определитель A_{23} также равен 0, так как в нем пропорциональны первые два столбца: второй столбец равен первому, умноженному на (–1).

Для вычисления определителя A_{21} вначале прибавим ко второй строке две первых, а к третьей строке – три первых:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = (32 - 36) = -4.$$

Значит, исходный определитель равен: $(-4) \cdot (-4) + 0 = 16$.

б) $$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ +4I \\ +2I \\ +3I \end{array} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 6 \\ \cdot 4 \end{array} =$$

$$= \frac{1}{24} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 24 & 36 \\ 0 & 0 & 24 & 32 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -III \end{array} = \frac{1}{24} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & 24 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

Получили треугольную матрицу. Поэтому исходный определитель равен: $\frac{1}{24} \cdot (-1) \cdot 4 \cdot 24 \cdot (-4) = 16$.

Ответ. 16.

Задача 3. Решите СЛУ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$ следующими методами:

а) с помощью формул Крамера;

б) с помощью формулы для обратной матрицы.

Решение.

а) Вычислим определитель основной матрицы СЛУ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3II \\ \\ -4II \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 9 \end{vmatrix}_{-5I} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = -11.$$

Матрица невырожденная. Значит СЛУ имеет единственное решение.

Применим правило Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Получаем:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (25 + 0 - 6) - (3 + 0 + 5) = 11;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (0 + 3 - 20) - (0 + 25 - 9) = -33;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (9 + 0 - 5) - (20 + 0 + 6) = -22;$$

Итак,

$$x_1 = \frac{11}{-11} = -1, \quad x_2 = \frac{-33}{-11} = 3, \quad x_3 = \frac{-22}{-11} = 2.$$

Решением будет тройка (–1, 3, 2).

б) Из предыдущего пункта:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -11.$$

Основная матрица системы невырожденная. Значит СЛУ имеет единственное решение.

Найдем обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения:

$A_{11} = 4$	$A_{21} = -11$	$A_{31} = -3$
$A_{12} = -9$	$A_{22} = 11$	$A_{32} = -(-4)$
$A_{13} = -5$	$A_{23} = -(-11)$	$A_{33} = 1$

Итак,

$$A^{-1} = -\tfrac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -11 & -3 \\ -9 & 11 & 4 \\ -5 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данную СЛУ запишем в матричной форме и найдем решение:

$$AX = B \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X = A^{-1}B = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -11 & -3 \\ -9 & 11 & 4 \\ -5 & 11 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\tfrac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -33 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решением будет тройка (–1, 3, 2).

Ответ. а), б) (–1, 3, 2).