Исследование систем линейных уравнений

Расширенная матрица системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$ – матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов системы, в последнем столбце расширенной матрицы записаны свободные члены уравнений.

Основная матрица системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$ – матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов системы без учета столбца свободных членов.

Критерий Кронекера–Капелли. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы этой системы равен рангу ее расширенной матрицы*.

Неоднородная система линейных уравнений – система, среди свободных членов которой есть хотя бы одно ненулевое число.

Однородная система линейных уравнений – система, все свободные члены которой равны 0.

Рангом однородной системы линейных уравнений – ранг ее расширенной матрицы (он равен рангу ее основной матрицы).

Теорема. *Множество M всех решений любой системы уравнений равно сумме множества V всех решений соответствующей однородной системы и любого фиксированного решения c исходной системы*: $M = V + c = \{a + c \mid a \in V\}$

Теорема. *Множество решений однородной системы уравнений является векторным пространством*.
В частности, множество решений V любого однородного линейного уравнения

обладает следующими свойствами:
1) нулевой вектор лежит в V: $\mathbf{0} \in V$.
2) умножив решение на любой скаляр, также получим решение этого уравнения: $c \in V \;\Longrightarrow\; rc \in V$ $(-c \in V)$.
В частности, умножив решение на (–1), мы получим противоположный вектор, являющийся решением данного уравнения.
3) сумма любых двух решения снова является решением:

$c_1,\ c_2 \in V \;\Longrightarrow\; c_1 + c_2 \in V$.

Базис векторного пространства V – любая его линейно независимая часть, через которую линейно выражается каждый вектор из V.

Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений (сокращенно ФСР) – базис пространства решений этой системы.

Размерность пространства – число векторов в базисе пространства называется (не зависит от выбранного базиса).

Теорема. *Пусть система однородных уравнений содержит n переменных. Если ранг r этой системы меньше n, то она имеет фундаментальную систему решений, состоящую из n – r векторов. То есть размерность пространства решений такой системы равна n – r. Если же параметры n и r равны, то единственным решением такой системы является нулевой вектор, в этом случае, базис выделить нельзя.*

Фундаментальная система решений

Однородная система уравнений – система с нулевым столбцом свободных членов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Фундаментальная система решений однородной системы уравнений – это базис векторного пространства всех ее решений.

Теорема. *Пусть система однородных уравнений содержит n переменных. Если ранг r этой системы меньше n, то она имеет фундаментальную систему решений, состоящую из n – r векторов. То есть размерность пространства решений такой системы равна n – r. Если же параметры n и r равны, то единственным решением системы является нулевой вектор, в этом случае, базис выделить нельзя.*

Алгоритм поиска фундаментальной системы решений:
1. Вначале с помощью элементарных преобразований приводят основную матрицу системы к ступенчатому виду. Достаточно работать только с основной матрицей,

так как элементарные преобразования не изменяют нулевой столбец свободных членов.
2. Если первое условие теоремы выполняется (ранг r системы меньше числа переменных n), то в ступенчатой системе уравнений появятся свободные переменные. Иначе (если параметры n и r равны) ФСР нет.
3. Для поиска ФСР выражаем главные переменные через свободные. Затем вместо свободных переменных подставляем значения таким образом, чтобы получившиеся частные решения дали базис множества всех решений исходной системы уравнений. Если этих решений будет $n - r$ и они будут линейно независимы, значит, требуемый базис построен.

Пример исследования однородной системы, не имеющей ФСР:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}.$$

Проверим, имеет ли она фундаментальную систему решений. Выполним элементарные преобразования над ее основной матрицей. Вначале вычтем из второй и третьей строк первую:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ -I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученные две последние строки не пропорциональны, поэтому прибавив, например, к третьей строке одну вторую второй строки, нулевую строку мы не получим, то есть в ступенчатой системе будет три строки. Значит, ранг данной системы уравнений равен 3.

Получаем, что ранг системы равен числу переменных. Значит эта система имеет единственное нулевое решение. Базиса на множестве решений нет.

Пример исследования однородной системы, имеющей ФСР из одного решения:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

Так как число строк системы меньше числа переменных, то условие $r < n$ (ранг r системы меньше числа переменных n) наверняка выполнится. Значит, фундаментальную систему решений построить можно. Составим матрицу из коэффициентов системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ранг системы равен 3 (потому что в ступенчатой системе три строки): $r = 3 < 4 = n$.
Посчитаем размерность пространства решений: $n - r = 4 - 3 = 1$.

Значит, базис множества решений состоит из одного вектора. Перейдем к системе:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Главные переменные – это x_1, x_2, x_4 (они соответствуют ведущим элементам матрицы). Переменная x_3 – свободная. Выражаем главные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Чтобы найти один базисный вектор, надо взять, любое ненулевое решение. Для этого придадим переменной x_3 какое-то значение, например, 1:

x_1	x_2	x_4	x_3
			1

Далее вычисляем значения главных переменных. Так как $x_3 = 1$, то из системы

$\begin{cases} x_1 = -4x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ находим:

x_1	x_2	x_4	x_3
-4	-1	0	1

Получаем базисный вектор–решение: (–4,–1,1,0). Найденный вектор будет составлять фундаментальную систему решений для данной системы уравнений. Значит, любое решение однородной системы можно выразить через этот базисный вектор. То есть все векторы из множества M решений данной СЛУ пропорционально этому вектору: $M = \{k(-4,-1,1,0) \mid k \in \mathbb{R}\} = \{(-4k,-k,k,0) \mid k \in \mathbb{R}\}$.

Пример исследования однородной системы, имеющей ФСР из нескольких решений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}.$$

Составляем основную матрицу и элементарными преобразованиями приводим ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3I \\ -4I \\ -3I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ -3II \\ +2II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы было поменьше отрицательных чисел, после первого преобразования вторую строку мы умножили на (–1). В итоге получим две нулевые строки, которые вычеркиваем:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ступенчатая матрица построена, в ней две строки. Значит, ранг системы равен 2. В системе 4 переменные: $r = 2 < 4 = n$. Число векторов в базисе решений равно 2: $n - r = 4 - 2 = 2$.

Найдем их.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ \quad x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Выражаем главные переменные x_1, x_2 через свободные x_3, x_4

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases}.$$

Теперь нужно подставить вместо x_3, x_4 такие значения, чтобы получить два линейно независимых решения. Для этого снова составим таблицу:

x_1	x_2	x_3	x_4

Заполним столбцы x_3, x_4 числами так, чтобы получилась ступенчатая матрица. Часто выбирают самый простой вариант – записывают единичные строки, в которых на одной позиции стоит единица, а в остальных – нули. Для нашего примера это строки: (1,0) и (0,1):

x_1	x_2	x_3	x_4
		1	0
		0	1

Теперь для каждого набора x_3, x_4 вычисляем значения главных переменных x_1, x_2.

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases}$$

получим

x_1	x_2	x_3	x_4
8	–6	1	0
–7	5	0	1

Найдены два линейно независимых вектора-решения с координатами (8,–6,1,0) и (–7, 5,0,1).

Выше было найдено, что пространство всех решений двумерно. Любая система из двух линейно независимых векторов в двумерном пространстве будет базисом. Значит, базис на множестве решений данной однородной системы найден, то есть фундаментальная система решений построена.

Заметим, что в качестве базиса можно получить другие векторы, если взять другие значения свободных переменных.

Общее решение исходной системы может быть записано как линейная комбинация базисных векторов. Значит, множество M всех решений можно записать в виде четверки чисел, зависящей от произвольных значений k и s свободных переменных:

$$M = \{k(8,-6,1,0) + s(-7,5,0,1) \mid k, s \in \mathbb{R}\}=$$
$$= \left\{\left(8k - 7s, \quad -6k + 5s, \quad k, \quad s\right) \mid k, s \in \mathbb{R}\right\}.$$