Однородные системы линейных уравнений.
Фундаментальная система решений однородной СЛУ

Задача 1. Могут ли векторы $a = (1,2,-3)$, $b = (1,-1,0)$, $c = (3,3,-6)$ являться фундаментальной системой решений некоторой однородной СЛУ?

Решение.

Составляем матрицу из строк векторов

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Приводим к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ -3I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен 2. Значит, данная система векторов линейно зависима и базисом она быть не может.

Ответ. Не базис.

Задача 2. Найти однородную СЛУ, фундаментальная система решений которой состоит из двух векторов $a = (1,2,-3)$, $b = (1,-1,0)$.

Решение. Эти векторы уже линейно независимы, так как не пропорциональны. Значит, они являются базисом некоторого пространства. Найдем однородную СЛУ, базис решений которой состоит из a, b.

Заметим, что координаты векторов в сумме дают 0. Значит, a и b являются решениями уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Рассмотрим пространство решений этого линейного уравнения. По теореме из лекции это пространство двумерное (3 – 1 = 2).

Так как a и b – линейно независимые решения, то они образуют базис.

Итак, имеем систему

$$\{x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

состоящую из одного линейного однородного уравнения, ФСР которой (a, b).

Зададим вопрос: можно ли составить для этого уравнения другую ФСР?

Да, в качестве базиса можно взять любое два трехмерных вектора, непропорциональных (то есть линейно независимых) и имеющих сумму координат равную 0.

Например, $a = (1,0,-1)$, $b = (3,-2,-1)$ – также базис множества решений системы $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Ответ. $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Задача 3. Найти однородную СЛУ, фундаментальная система решений которой состоит из одного вектора $a = (1,2,-3)$.

Решение. Пусть (x_1, x_2, x_3) – произвольное решение нужной нам системы уравнений.

Тогда $(x_1, x_2, x_3) = ka = k(1,2,-3) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = 2k \\ x_3 = -3k \end{cases}$. Переменную x_1 можно считать свободной, остальные переменные выражаются через x_1: $\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = -3x_1 \end{cases}$.

Имеем нужную однородную СЛУ: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Ответ. Например, $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Задача 4. Зная, что общее решение однородной СЛУ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ имеет вид $k(1,2,-3)$, записать общее решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_3 = 5 \end{cases}.$$

Решение.

Обозначим множество всех решений неоднородной СЛУ

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 4 \\ 3x_1 + x_3 = 5 \end{cases}$$

через M.

Легко видеть, что ее частным решением будет тройка $c = (0,-4,5)$.

Обозначим множество всех решений соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

через $V = \{k(1,2,-3) | k \in \mathbb{R}\}$.

Используя связь решений неоднородной СЛУ и соответствующей однородной СЛУ, получим:

$$\text{M} = \text{V} + \text{c} = \{\text{k}(1,2,\text{-}3)|\text{k} \in \text{R}\} + (0,\text{-}4,5) =$$
$$= \{k(1,2,-3) + (0,-4,5)|k \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(k, 2k-4, -3k+5)\ |k \in \mathbb{R}\}.$$

Ответ. $\text{M} = \{(k, 2k-4, -3k+5)\ |k \in \mathbb{R}\}$.

Задача 5. Имеет ли однородная СЛУ

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

фундаментальную систему решений?

Решение.

Если в данной СЛУ

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Поменять порядок переменных на (y, x, z), она будет ступенчатой:

$$\begin{cases} 2y + x - z = 0 \\ 2x + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

В полученной ступенчатой матрице противоречивых уравнений нет, и число уравнений совпадает с числом неизвестных. Значит она имеет единственное решение.

Поскольку СЛУ однородная, однородная СЛУ всегда имеет нулевое решение, то множество всех ее решений состоит из одного нулевого. У нулевой системы векторов базиса нет. Значит СЛУ фундаментальной системы решений не имеет.

Ответ. ФСР нет.

Задача 6. Найдите фундаментальную систему решений однородной СЛУ

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}.$$

Запишите общее решение.

Решение.

Составим матрицу из коэффициентов системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2I \\ +3I \\ -4I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -II \\ +II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ранг системы равен 2 (потому что в ступенчатой системе две строки), число переменных – три:

$$r = 2 < 3 = n.$$

Посчитаем размерность пространства решений:

$$n - r = 3 - 2 = 1.$$

Значит, базис множества решений состоит из одного вектора.

Перейдем к системе:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Главные переменные – это x_1, x_2 (они соответствуют ведущим элементам матрицы). Переменная x_3 – свободная.

Выражаем главные переменные через свободные:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -3x_3. \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Чтобы найти один базисный вектор, надо из найденного множества решений взять любое ненулевое.

Для этого придадим переменной x_3 какое-нибудь значение, например, 1:

x_1	x_2	x_3
		1

Далее вычисляем значения главных переменных. Так как $x_3 = 1$, то из системы

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -3x_3 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

находим:

x_1	x_2	x_3
2	–3	1

Получаем базисный вектор–решение: (2,–3,1).

Найденный вектор будет составлять фундаментальную систему решений для данной системы уравнений. Значит, любое решение однородной системы можно выразить через этот базисный вектор. То есть все векторы из множества M решений данной СЛУ пропорциональны этому вектору:

$$M = \{k(2,-3,1) \mid k \in \mathbb{R}\} = \{(2k, -3k, k) \mid k \in \mathbb{R}\}.$$

Ответ. ФСР: (2,–3,1).

Задача 7. Найдите фундаментальную систему решений однородной СЛУ

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x_1 + x_2 + x_3 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0} \end{cases}.$$

Запишите общее решение.

Решение. Составляем основную матрицу и элементарными преобразованиями приводим ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2II \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

После перестановки строк последней матрица, получим ступенчатую СЛУ ранга два и с 4-мя переменными:

$$r = 2 < 4 = n.$$

Число векторов в базисе решений равно 2:

$$n - r = 4 - 2 = 2.$$

Найдем их.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} -3x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

Выражаем главные переменные x_1, x_2 через свободные x_3, x_4

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{5}{3}x_3 - \frac{8}{3}x_4 \\ x_1 = -2\left(-\frac{5}{3}x_3 - \frac{8}{3}x_4\right) - 3x_3 - 4x_4 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 \end{cases}.$$

Теперь нужно подставить вместо x_3, x_4 такие значения, чтобы получить два линейно независимых решения. Для этого снова составим составим таблицу:

x_1	x_2	x_3	x_4

Заполним столбцы x_3, x_4 числами так, чтобы получилась ступенчатая матрица. Для нашего примера лучше взять строки: (3,0) и (0,3):

x_1	x_2	x_3	x_4

		3	0
		0	3

Теперь для каждого набора x_3, x_4 вычисляем значения главных переменных x_1, x_2.

Из системы

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 \\ x_2 = -\frac{5}{3}x_3 - \frac{8}{3}x_4 \end{cases}$$

получим

x_1	x_2	x_3	x_4
1	–5	3	0
4	–8	0	3

Найдены два линейно независимых вектора-решения с координатами

(1,–5,3,0) и (4, –8,0,3).

Выше было найдено, что пространство всех решений двумерно. Любая система из двух линейно независимых векторов в двумерном пространстве будет базисом. Значит, базис на множестве решений данной однородной системы найден, то есть фундаментальная система решений построена.

Заметим, что в качестве базиса можно получить другие векторы, если взять другие значения свободных переменных.

Общее решение исходной системы может быть записано как линейная комбинация базисных векторов. Значит, множество M всех решений можно записать в виде четверки чисел, зависящей от произвольных значений k и s свободных переменных:

$$M = \{k(1,-5,3,0) + s(4,-8,0,3) \mid k,s \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(k + 4s,\ -5k - 8s,\ 3k,\ 3s) \mid k,s \in \mathbb{R}\}.$$