Линейная зависимость векторов. Базис

Арифметическое n-мерное векторное пространство – это множество
$\mathbb{R}^n = \{(r_1, r_2, \ldots, r_n) \mid r_i \in \mathbb{R}\}$
n-к действительных чисел с покоординатно определенными на нем операциями сложения n-к и умножения n-ки на число (скаляр).

Сложение n-ок определяется по правилу:
$(r_1, r_2, \ldots, r_n) + (s_1, s_2, \ldots, s_n) =$
$= (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \ldots, r_n + s_n)$,

Умножение n-ки на число определяется правилом:
$k(r_1, r_2, \ldots, r_n) = (kr_1, kr_2, \ldots, kr_n)$.

Линейная комбинация системы n-ок (n-мерных векторов) $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – n-ка (вектор) вида
$r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_ma_m$,
где $r_i \in \mathbb{R}$ называются коэффициентами при n-ках a_i.

Нулевая линейная комбинация векторов – линейная комбинация этих векторов с только нулевыми коэффициенты.

Ненулевая линейная комбинация векторов – линейная комбинация этих векторов , среди коэффициентов которой есть ненулевые.

Линейно зависимая система векторов – это либо система из однго нулевого вектора, либо система из двух и более векторов, среди которых найдется вектор, равный линейной комбинации остальных.

Критерий линейной зависимости векторов. *Система векторов линейно зависима в точности, когда существуют такие числа* $r_1, r_2, \ldots, r_n$, *среди которых есть ненулевые, что*
$r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_n a_n = \mathbf{0}$.
Другими словами: *система векторов линейно зависима, если некоторая ее ненулевая линейная комбинация равна нулевому вектору*.

Линейно независимая система векторов – система, не являющаяся линейно зависимой.

Критерии линейной независимости. *Система векторов* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *будет линейно независимой тогда и только тогда, когда равенство*

$$r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_n a_n = \mathbf{0}$$

выполняется лишь при

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0.$$

Теорема. *Две* n*-ки линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны*.

Теорема. *Если в системе* n*-ок есть нулевая, то система линейно зависима*.

Теорема. *Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она сама линейно зависима.*

Теорема. *Любая линейно независимая система n-мерных векторов содержит не более n векторов. Другими словами, если система n-мерных векторов содержит более n векторов, то она линейно зависима.*

Теорема. *Строки ступенчатой матрицы линейно независимы.*

Система единичных векторов – система векторов
$e_1 = (1,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0)$,
$e_2 = (0,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0)$,
$\dots$,
$e_n = (0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 1)$
(у каждого единичного вектора e_i все координаты кроме i-ой равны 0, а на i-й позиции стоит 1).

Коллинеарные векторы – геометрические векторы, параллельные одной и той же прямой.

Компланарные векторы – геометрические векторы, параллельные одной плоскости.

Векторы $b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_m$ линейно выражаются через векторы $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_s$, если каждый вектор b_i равна линейной комбинации $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_s$.

Базис системы векторов – любая ее линейно независимая подсистема, через которую линейно выражается вся эта система.

Теорема. *В $\mathbb{R}^n$ любой вектор по базису разлагается однозначно.*

Координаты вектора x в базисе $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ – коэффициенты $k_1,\ k_2, \dots,\ k_n$ разложения

$$x = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n$$

вектора x по базису $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$.

Теорема. *В $\mathbb{R}^n$ любая ненулевая система векторов обладает хотя бы одним базисом. Нулевая система базиса не имеет.*

Теорема. *Любые два базиса одной системы имеют одинаковое число векторов.*

Рангом системы векторов – постоянное для этой системы число векторов в ее базисах. Ранг нулевой системы считается равным 0.

Rank – обозначение ранга системы векторов.

Размерность векторного пространства – это ранг этого пространства

Dim – обозначение размерности векторного пространства.

$Dim(\mathbb{R}^n) = n$,

$Dim(\mathrm{E}_2) = 2$,

$Dim(\mathrm{E}_3) = 3.$

Ранг матрицы – ранг системы системы ее строк.

Теорема. *Применение элементарных преобразований к системе векторов дает систему того же ранга.*

Теорема. *Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее строк*.