Линейная зависимость. Базис

Задача 1. Является ли система векторов линейно зависимой:

1) $a = (1,1),\ b = (2,1),$

2) $a = (1,1,2),\ b = (0,1,0), c = (1,2,2)$?

Решение.

1)

Два вектора $(1,1)$ и $b = (2,1)$ имеют непропорциональные координаты. Значит они образуют линейно независимую систему (один из них нельзя выразить через другой).

2)

1 способ:

Линейную зависимость векторов $a = (1,1,2),\ b = (0,1,0), c = (1,2,2)$ проверим по критерию линейной зависимости: посмотрим, найдется ли ненулевая линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору. Запишем это равенство:

$$k_1(1,1,2) + k_2(0,1,0) + k_3(1,2,2) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (k_1, k_1, 2k_1) + (0, k_2, 0) + (k_3, 2k_3, 2k_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(k_1 + k_3,\quad k_1 + k_2 + 2k_3,\quad 2k_1 + 2k_3\right) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \\ 2k_1 + 2k_3 = 0 \end{cases}$$

Приведем основную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ -2I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу. В соответствующей ступенчатой СЛУ два уравнения и три неизвестные. Значит, СЛУ имеет бесконечно много решений. В том числе бесконечно много ненулевых решений.

Получаем, что найдется ненулевая линейная комбинация (с ненулевым набором коэффициентов k_1, k_2), равная нулевому вектору.

Согласно критерию линейной зависимости, данная в задаче система векторов линейно зависима.

2. способ:

Для векторов $a = (1,1,2),\ b = (0,1,0), c = (1,2,2)$ можно заметить, что третий является суммой первых двух: $a + b = c$. По определению такая система линейно зависима.

3 способ:

Вспомним, что применение элементарных преобразований к системе векторов дает систему того же ранга.

Узнаем, из скольких векторов состоит базис системы $a = (1,1,2)$, $b = (0,1,0), c = (1,2,2)$. Для этого составим из них матрицу и найдем ее ранг, то есть найдем число строк в соответствующей ступенчатой матрице:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{-I} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{-II} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг оказался равен двум. Так как любая конечная система векторов имеет базис, то в данной системе каждый вектор будет линейно выражаться через некоторый ее вектор. По определению, такая система линейно зависима.

Ответ. 1) нет;

2) да.

Задача 2. Найти базис системы векторов:

1) $a = (1,1,2),\ \ b = (0,1,0),\ \ c = (1,2,2),$

2) $a = (1,1,2),\ \ b = (0,1,0),\ \ c = (1,2,2),\ \ d = (2,2,4),\ \ e = (0,0,2).$

1) Требуется найти базис системы векторов

$$a = (1,1,2),\ \ b = (0,1,0),\ \ c = (1,2,2).$$

То есть необходима найти такую линейно независимую подсистему данной системы, через которую можно выразить каждый вектор этой системы векторов.

Заметим, что система векторов $a = (1,1,2)$, $b = (0,1,0)$ линейно независима (их координаты не пропорциональны. При этом третий вектор $c = (1,2,2)$ линейно выражается через эти два:

$$a + b = c.$$

Кроме того, каждый вектор сам через себя выражается. Значит через пару a, b можно выразить сами эти векторы:

$$a + 0 \cdot b = a,$$

$$0 \cdot a + b = b.$$

Итак, мы нашли линейно независимую подсистему a, b системы векторов a, b, c, через которую линейно выражаются все векторы системы. Значит, a, b – базис.

Можно найти все базисы данной системы. Так как количество векторов в базисах фиксированной системы постоянно, то в нашем случае все базисы состоят из двух векторов.

Можно проверить все оставшиеся пары на линейную независимость (в нашем примере базисом будет любая пара линейно независимых векторов):

$a = (1,1,2)$, $c = (1,2,2)$ не пропорциональны и значит, линейно независимы и образуют базис;

$b = (0,1,0)$, $c = (1,2,2)$ также дадут базис.

2) Из предыдущего примера мы знаем, что среди векторов

$$a = (1,1,2),\ \ b = (0,1,0),\ \ c = (1,2,2),\ \ d = (2,2,4),\ \ e = (0,0,2)$$

векторы a, b линейно независимы и выполняется равенство:

$$a + b = c.$$

Мы знаем, что, если система n-мерных векторов содержит более n векторов, то она линейно зависима. У нас 3-мерные векторы. Значит, в данной в примере системе векторов базис как будет содержать не больше трех векторов.

Проверим, может ли система a, b быть базисом.

Заметим, что $d = 2\ a$.

Однако вектор e не удается выразить через векторы a, b. Эти три вектора линейно независимы, так как составленная из них матрица является ступенчатой.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что строки ступенчатой матрицы линейно независимы.

Получили линейно независимую подсистему систему из трех трехмерных векторов a, b, e. Это базис.

Покажем, что все векторы выражаются через базис:

$$a + 0 \cdot b + 0 \cdot e = a,$$

$$0 \cdot a + b + 0 \cdot e = b,$$

$$a + b + 0 \cdot e = c,$$

$$2a + 0 \cdot b + 0 \cdot e = d,$$

$$0 \cdot a + 0 \cdot b + e = e.$$

Ответ. 1) a, b *либо* $a, c,$ либо b, c.

2) Например, a, b, e.

Задача 3. Найти ранг и базис системы векторов

$a = (3,2,0)$,

$b = (2,1,-1)$,

$c = (1,2,4)$,

$d = (7,5,1)$.

Через найденный базис выразить остальные векторы системы.

Запишем матрицу, составленную из данных векторов:

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 4\\ 7 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы – это ранг системы ее строк, то есть ранг данной в задаче системы векторов.

Приведем матрицу к ступенчатому виду. Мы воспользуемся тем, что применение элементарных преобразований к системе векторов дает систему того же ранга, а ранг полученной ступенчатой матрицы равен числу ее строк.

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 4\\ 7 & 5 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 0\\ 7 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ -2I\\ -3I\\ -7I\end{array}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -3 & -9\\ 0 & -4 & -12\\ 0 & -9 & -27\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ :(-3)\\ :(-4)\\ :(-9)\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ -II\\ -II\end{array}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Итак, ранг матрицы, он же ранг системы данных в задаче векторов равен двум. Значит, все базисы системы состоят из двух линейно независимых векторов. Более того, любые два линейно независимые вектора будут базисом этой системы. Два вектора линейно независимы, если их координаты не пропорциональны.

Таким образом базисами системы векторов

$a = (3,2,0)$,

$b = (2,1,-1)$,

$c = (1,2,4)$,

$d = (7,5,1)$.

Будут пары:

$a = (3,2,0)$ и $b = (2,1,-1)$;

$a = (3,2,0)$ и $c = (1,2,4)$;

$a = (3,2,0)$ и $d = (7,5,1)$;

$b = (2,1,-1)$ и $c = (1,2,4)$;

$b = (2,1,-1)$ и $d = (7,5,1)$;

$c = (1,2,4)$ и $d = (7,5,1)$.

Для базиса $a = (3,2,0)$, $b = (2,1,-1)$ выразим через него остальные векторы системы.

Для этого можно решить векторные уравнения:

$$k_1 \cdot a + k_2 \cdot b = c,$$
$$r_1 \cdot a + r_2 \cdot b = d.$$

Можно воспользоваться тем, что при приведении матрица данных векторов к ступенчатому виду мы элементарными преобразованиями свели векторы с и d к нулевому вектору (они соответствовали 3-й и 4-й строкам) и тем самым использовали связь между этими векторами и векторами a и b.

Найдем разложение для вектора c первым из указанных способов, а разложение для d – вторым.

Распишем векторное уравнение:

$$k_1 \cdot a + k_2 \cdot b = c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k_1 \cdot (3,2,0) + k_2 \cdot (2,1,-1) = (1,2,4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3k_1, 2k_1, 0) + (2k_2, k_2, -k_2) = (1,2,4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(3k_1 + 2k_2, \quad 2k_1 + k_2, \quad -k_2\right) = (1,2,4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3k_1 + 2k_2 = 1 \\ 2k_1 + k_2 = 2 \\ -k_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k_1 + 2 \cdot (-4) = 1 \\ 2k_1 - 4 = 2 \\ k_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k_1 = 9 \\ 2k_1 = 6 \\ k_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 3 \\ k_1 = 3 \\ k_2 = -4 \end{cases}.$$

Получили решение $k_1 = 3$, $k_2 = -4$. Значит,

$$3a - 4b = c$$

или

$$3 \cdot (3,2,0) - 4 \cdot (2,1,-1) = (1,2,4).$$

Найдем разложение вектора d, применив вычисления, проделанные при приведении матрицы векторов к ступенчатому виду.

Вспомним эти преобразования, обозначив соответствующие строкам векторы и прописывая те изменения, которые происходили с каждой строкой:

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{c} c \\ b \\ a \\ d \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -2I \\ -3I \\ -7I \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{c} c \\ b-2c \\ a-3c \\ d-7c \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & -9 & -27 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ :(-3) \\ :(-4) \\ :(-9) \end{array}\sim$$

$$\begin{array}{c} c \\ (b-2c):(-3) \\ (a-3c):(-4) \\ (d-7c):(-9) \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ -II \\ -II \end{array}\sim$$

$$\begin{array}{c} c \\ (b-2c):(-3) \\ (a-3c):(-4)-(b-2c):(-3) \\ (d-7c):(-9)-(b-2c):(-3) \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя строка дают следующее равенство:

$$\frac{d-7c}{-9}-\frac{b-2c}{-3}=\mathbf{0}=(0,0,0)$$

Домножим уравнение на 9. Получим:

$$d-7c-(3\,b-6c)=\mathbf{0}\Rightarrow d=c+3b.$$

Известно, что $c=3a-4b$. Тогда

$$d=c+3b=(3a-4b)+3b=3a-b$$

или

$$(7,5,1)=3\cdot(3,2,0)-(2,1,-1).$$

Итак, в базисе a,b остальные векторы раскладываются как $c=3a-4b$ и $d=3a-b$.

Ответ. Rank=2.

Базис a,b.

$c=3a-4b$ и $d=3a-b$.