Лекция 5.

Линейная зависимость векторов. Базис

На предыдущей лекции мы познакомились с арифметическим n-мерным векторным пространством $\mathbb{R}^n$, как важным примером векторных пространств. Данная лекция посвящена понятию базиса системы векторов из $\mathbb{R}^n$. Все факты и понятия, о которых будет идти речь на лекции, могут быть сформулированы для произвольного векторного пространства.

Напомним, что арифметическое n-мерное векторное пространство – это множество

$$\mathbb{R}^n = \{(r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_n) \mid r_i \in \mathbb{R}\}$$

n-к действительных чисел с покоординатно определенными на нем операциями сложения n-ок и умножения n-ки на число (скаляр).

Приведем определения введенных операций.

– сложение n-ок:

$$(r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_n) + (s_1,\ s_2,\ \dots,\ s_n) =$$
$$= (r_1 + s_1,\ r_2 + s_2,\ \dots,\ r_n + s_n),$$

– умножение n-ки на скаляр:

$$k(r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_n) = (kr_1,\ kr_2,\ \dots,\ kr_n).$$

Введём понятие линейной комбинации системы n-мерных векторов. Линейной комбинацией векторов $a_1,\ a_2, \dots,\ a_m$ называется вектор вида

$$r_1a_1 + r_2a_2 + \dots + r_ma_m,$$

где все $r_i \in \mathbb{R}$ называются коэффициентами при векторах a_i.

Другими словами, линейная комбинация системы векторов – это любой вектор, построенный из данных с помощью операций сложения и умножения на число.

Линейная комбинация называется нулевой, если все коэффициенты, указанные в ее записи, равны нулю. Если есть хотя бы один ненулевой коэффициент, то линейная комбинация называется ненулевой.

Определим понятие линейно зависимой системы векторов.

Два и более вектора будем называть линейно зависимыми, если среди них найдется вектор, равный линейной комбинации остальных векторов. То есть, система векторов линейно зависима, если один из них можно получить из остальных с помощью операции сложения и умножения на число.

Систему, состоящую из одного вектора, будем называть линейно зависимой, если этот вектор нулевой.

Имеет место следующий критерий линейной зависимости векторов.

Теорема. *Система векторов линейно зависима в точности тогда, когда существуют такие числа $r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_n$, среди которых есть ненулевые, что*

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n\, a_n = \mathbf{0}$$

Можно переформулировать эту теорему так: *система векторов линейно зависима, если некоторая ее ненулевая линейная комбинация равна нулевому вектору*.

Определим линейно независимую систему как систему, не являющуюся линейно зависимой.

Можно использовать следующий критерий линейной независимости.

Теорема. *Система векторов* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *будет линейно независимой тогда и только тогда, когда равенство их линейной комбинации нулевому вектору*

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n\, a_n = \mathbf{0}$$

выполняется <u>*только*</u> *при нулевых коэффициентах*

$$r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0.$$

Приведем некоторые свойства линейной зависимости.

Очевидно, что *две n-мерные строки линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны*.

Если в системе есть нулевой вектор, то эта система линейно зависима.

Верны следующие утверждения:

Теорема. *Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она сама линейно зависима.*

Теорема. *Любая линейно независимая система n-мерных векторов содержит не более* n *векторов. Другими словами, если система n-мерных векторов содержит более* n *векторов, то она линейно зависима*.

Составим из n-мерных строк матрицу размера $m \times n$:

$$m \text{ векторов из } \mathbb{R}^n \quad \leftrightarrow \quad \text{строки матрицы } m \times n$$

Справедлива

Теорема. *Строки ступенчатой матрицы линейно независимы.*

Например, следующая матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

является ступенчатой. Значит, ее строки линейно независимы:

система векторов $(1,\ 2,\ 3,\ 4), (0,\ 5,\ 6,\ 7) (0,\ 0,\ 8,\ 9)$ линейно независима.

Другим примером линейно независимой системы в $\mathbb{R}^n$ будет система единичных векторов:

$$e_1 = (1,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0),$$
$$e_2 = (0,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0),$$
$$\dots,$$
$$e_n = (0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 1).$$

Здесь у каждого единичного вектора e_i все координаты кроме i-ой равны 0, а на i-ой позиции стоит 1.

Проиллюстрируем понятие линейной зависимости на геометрических векторных пространствах E_2 и E_3.

Система из одного вектора будет линейно зависимой, только если это нулевой вектор.

Два вектора в векторной плоскости E_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны, то есть параллельны одной прямой (рис. 1), иными словами, из двух векторов один выражается через другой только лишь в случае, когда они коллинеарны.

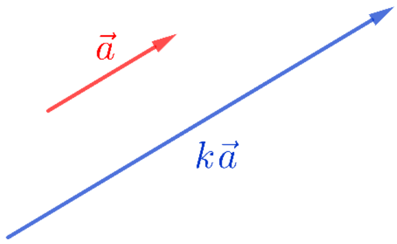

Рис. 1

В векторной плоскости E_2 любые три вектора всегда линейно зависимы. В векторном пространстве E_3 три вектора линейно зависимы лишь в случае, когда они компланарны, то есть параллельны одной плоскости (рис. 2). Какие бы три компланарных вектора мы ни взяли, один из них обязательно будет выражаться через два других.

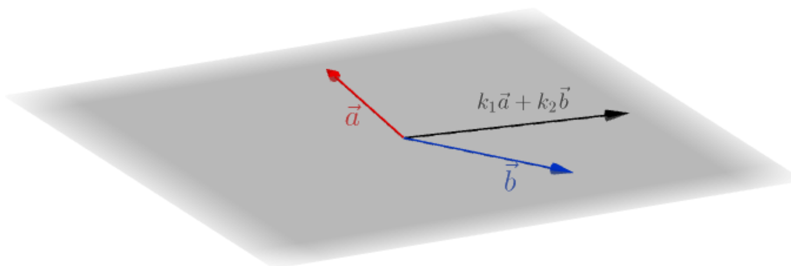

Рис. 2

В теории векторных пространств важным является понятие базиса системы векторов. Будем говорить, что векторы $b_1, b_2, \ldots, b_m$ линейно выражаются через векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$, если каждый b_i равен линейной комбинации векторов $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Под базисом системы векторов понимают такую ее линейно независимую подсистему, через которую линейно выражается вся эта система.

Рассмотрим примеры. Возьмем три вектора

$$a = (1, 2, 3), \;\; b = (0, 1, 0), \;\; c = (0, 2, 0).$$

Легко видеть, что векторы b и c пропорциональны. Значит, между собой они линейно зависимы. Вся система векторов будет также линейно зависимой, поскольку содержит линейно зависимую подсистему.

Если мы уберем один из векторов b или c, оставшиеся векторы будут линейно независимы, так как непропорциональны. Базис данной системы образуют два вектора:

$$a = (1,\ 2,\ 3),$$
$$b = (0,\ 1,\ 0),$$

или

$$a = (1,\ 2,\ 3),$$
$$c = (0,\ 2,\ 0)$$

Действительно, первая пара a, b линейно независима и через нее можно выразить все векторы системы:

$$a = 1 \cdot a + 0 \cdot\ b,$$
$$b = 0 \cdot a + 1 \cdot\ b,$$
$$c = 0 \cdot a + 2 \cdot\ b.$$

Аналогичные разложения можно записать для второй базисной пары a, c:

$$a = 1 \cdot a + 0 \cdot\ c,$$
$$c = 0 \cdot a + 1 \cdot\ c,$$
$$b = 0 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot\ c.$$

Приведем пример базиса всего арифметического пространства $\mathbb{R}^n$. Базис образует система единичных векторов

$$e_1 = (1,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0),$$
$$e_2 = (0,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0),$$
$$\dots,$$
$$e_n = (0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 1).$$

Действительно, какую бы n-ку чисел $(r_1,\ r_2, \dots,\ r_n)$ мы ни взяли, всегда можно представить её как линейную комбинацию единичных n-ок следующим образом:

$$(r_1,\ r_2, \dots,\ r_n) = r_1 e_1 + r_2 e_2 + \dots + r_n e_n.$$

Распишем правую часть этого равенства:

$$r_1 e_1 + r_2 e_2 + \dots + r_n e_n =$$

$$= r_1(1,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0) + r_2(0,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0) + \dots + r_n(0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 1) =$$

$$= \left(r_1,\ 0,\ \dots,\ 0\right) + \left(0, r_2,\ \dots,\ 0\right) + \dots + (0,\ 0,\ \dots, r_n) =$$

$$(r_1,\ r_2, \dots,\ r_n).$$

Приведем пример базисов геометрических пространств E_2 и E_3.

В векторной плоскости базисом будут любые два неколлинеарных вектора.

Действительно, возьмем неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Какой бы вектор $\vec{c}$ мы ни взяли, его можно представить как линейную комбинацию $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Чтобы это увидеть, отложим все эти три вектора от одной точки (рис 3).

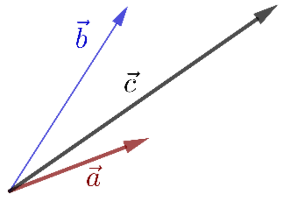

Рис. 3

Построим параллелограмм, диагональю которого будет вектор $\vec{c}$, как показано на рис. 4.

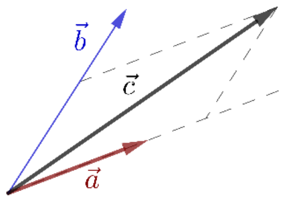

Рис. 4

Тогда по правилу параллелограмма вектор $\vec{c}$ будет суммой векторов, коллинеарных векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 5).

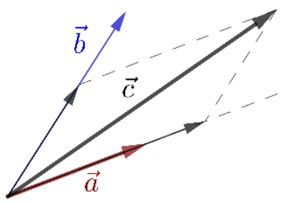

Рис. 5

Так как любые два коллинеарных вектора пропорциональны, то эти слагаемые можно представить как $r\vec{a}$ и $s\vec{b}$. (рис. 6)

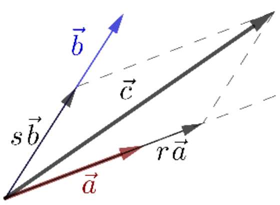

Рис. 6

Получаем, что

$$\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}.$$

Аналогично, в геометрическом пространстве всех векторов базисом будут любые три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рис. 7).

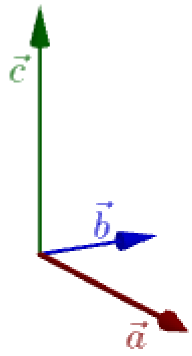

Рис. 7

Какой бы вектор $\vec{x}$ пространства мы ни взяли, его можно представить как линейную комбинацию базисных:

$$\vec{x} = r\vec{a} + s\vec{b} + l\vec{c}.$$

Можно провести соответствующие рассуждения, показывающие это (рис. 8)

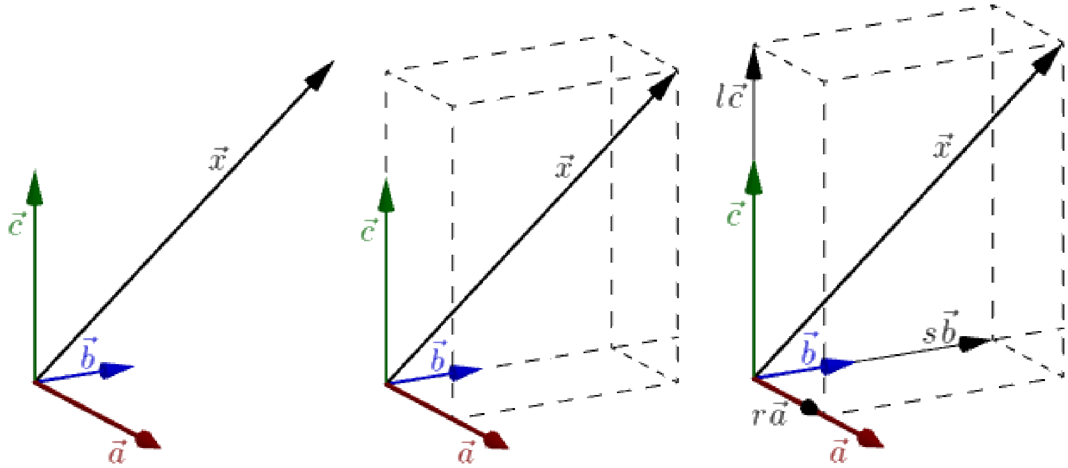

Рис. 8

Перейдем к следующему понятию теории векторных пространств, к понятию координат вектора. Для этого сформулируем утверждение, верное для любого векторного пространства.

Теорема. *В пространстве* $\mathbb{R}^n$ *любой вектор по базису разлагается однозначно*.

Зафиксируем какой-нибудь базис в $\mathbb{R}^n$:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n.$$

Любую n-ку $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ мы можем однозначно разложить по зафиксированному базису:

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n) = k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n.$$

Коэффициенты $k_1, k_2, \ldots, k_n$ разложения вектора по базису $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ называются координатами вектора в этом базисе.

Если мы возьмем единичный базис $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$, координатами n-ки $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ будут задающие ее числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Действительно, выше было показано, что для единичного базиса

$$(r_1, r_2, \ldots, r_n) = r_1e_1 + r_2e_2 + \cdots + e_nr_n.$$

С понятием координат геометрических векторов мы знакомы со школы.

Зафиксируем в векторной плоскости E_2 систему координат Oxy. Возьмем единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, отложенные от начала координат (рис. 9).

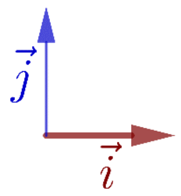

Рис. 9

Напомним, что единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ параллельны координатным осям Ox Oy соответственно и имеют единичную длину.

Отложим от начала координат произвольный вектор $\vec{x}$ (рис. 10).

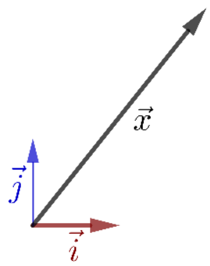

Рис. 10

Найдем коэффициенты разложения вектора $\vec{x}$ по единичному базису $\vec{i}$, $\vec{j}$ так, как это делали выше (рис. 11).

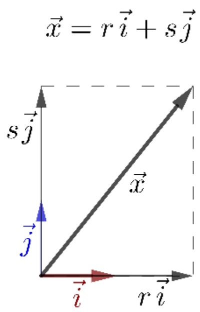

Рис. 11

Получаем, разложение

$$\vec{x} = r\vec{i} + s\vec{j}.$$

Коэффициенты r и s будут координатами вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$:

$$\vec{x}(r, s).$$

С другой стороны, множители r и s – это проекции точки конца вектора $\vec{x}$ на оси координат. Значит в системе координат Oxy пара (r, s) будет являтся координатами точки конца вектора $\vec{x}$, а значит, и школьными координатами самого вектора $\vec{x}$.

Итак, введенное нами определение координат вектора в фиксированном базисе на плоскости корректно, оно не противоречит школьным определениям.

Аналогично, для E_3 школьные координаты вектора системе координат пространства *Oxy* соответствуют его координатам в базисе из единичных векторов $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}, \vec{k}$ (рис. 12)

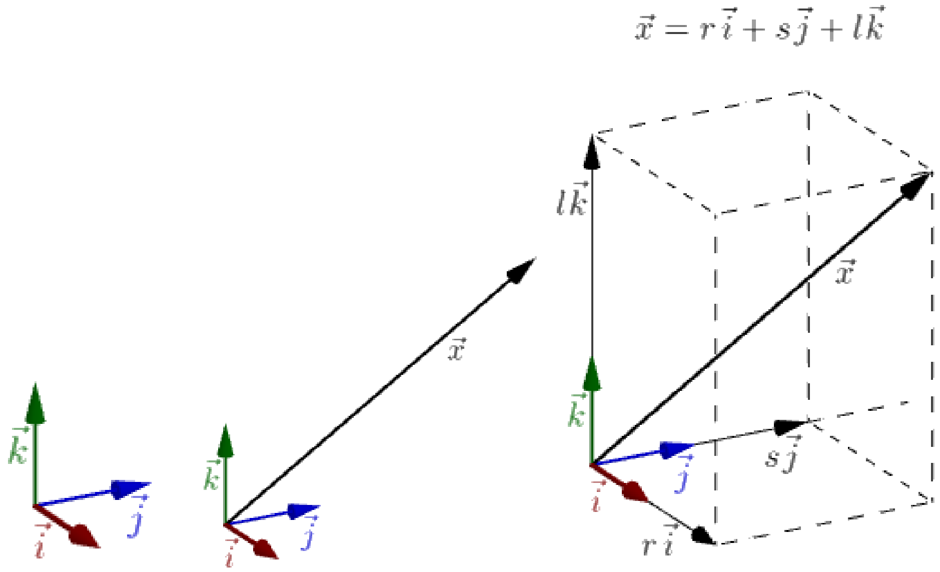

Рис. 12

Дальше нам понадобится понятие ранга системы векторов. Для того чтобы его определить, приведем следующие утверждения.

Теорема. *В* $\mathbb{R}^n$ *любая ненулевая система векторов обладает хотя бы одним базисом. Нулевая система базиса не имеет.*

Теорема. *Любые два базиса одной системы имеют одинаковое число векторов*.

Постоянное для каждой конкретной системы число векторов в ее базисах называется рангом этой системы и обозначается как Rank. Ранг нулевой системы считается равным 0.

Для обозначения числа базисных векторов для всего векторного пространства используется другой термин. Ранг векторного пространства называют его размерностью и обозначают как Dim.

Выше мы показали, что размерность арифметического n-мерного векторного пространства равна n, так как n векторов содержится в единичном базисе. Также мы можем сказать, что размерность векторной плоскости E_2 равна двум, а векторного пространства E_3 – трем:

$$Dim(\mathbb{R}^n) = n,$$
$$Dim(E_2) = 2,$$
$$Dim(E_3) = 3.$$

Отметим еще такое понятие как ранг матрицы. Строки любой матрицы размера $m \times n$ соответствуют n-мерным векторам из $\mathbb{R}^n$, поэтому ранг матрицы можно определить как ранг системы ее строк.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема. *Применение элементарных преобразований к системе векторов дает систему того же ранга.*

Теорема. *Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее строк*.