Пространство $\mathbb{R}^n$

Задача 1. Найти вектор x из векторного уравнения $2(a-3x)-3(b-x)=c-x$, если $a=(3,-1,2)$, $b=(1,2,-1)$, $c=(3,-2,-1)$.

Решение.

Применив свойства операций над n-ками, упростим данное уравнение:

$$2(a-3x)-3(b-x)=c-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a-6x-3\mathrm{b}+3x=c-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a-3x-3\mathrm{b}=c-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a-3\mathrm{b}-c=3x-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a-3\mathrm{b}-c=2x.$$

Подставим значения переменных a, b, c:

$$2x=2a-3\mathrm{b}-c=2(3,-1,2)-3(1,2,-1)-(3,-2,-1)=$$
$$=(6,-2,4)-(3,6,-3)-(3,-2,-1)=(0,-6,8).$$

Значит,

$$x=\frac{1}{2}(0,-6,8)=(0,-3,4).$$

Ответ. $x=(0,-3,4)$

Задача 2. С помощью операций сложения векторов и умножения на число получите вектор (0,0,0) из векторов

$$a=(1,-1,1),\ b=(1,2,2), c=(2,1,3)$$

разными способами.

Решение.

Требуется найти коэффициенты в уравнении:

$$k_1a+k_2\mathrm{b}+\mathrm{k}_3c=\mathbf{0},\quad k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}.$$

Подставим значения векторов a, b, c:

$$k_1(1,-1,1)+k_2(1,2,2)+\mathrm{k}_3(2,1,3)=(0,0,0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k_1, -k_1, k_1) + (k_2, 2k_2, 2k_2) + (2\mathrm{k}_3, \mathrm{k}_3, 3\mathrm{k}_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \big(k_1 + k_2 + 2k_3, \quad -k_1 + 2k_2 + k_3, \quad k_1 + 2k_2 + 3k_3\big) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \\ -k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases}$$

Задача свелась к решению полученной однородной системы (однородная СЛУ, все свободные члены которой равны 0). Применение элементарных преобразований к однородной СЛУ не меняет столбец ее свободных членов. Поэтому при решении свободные члены можно не учитывать.

Запишем основную матрицу данной системы (основная матрица системы – матрица коэффициентов системы без столбца свободных членов):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +I \\ -I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} -3III \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу, число уравнений которой меньше числа неизвестных. Соответствующая система имеет бесконечно много решений. Перейдем к системе:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \\ \quad k_2 + k_3 = 0 \end{cases}.$$

Главными неизвестными назначим x_1 и x_2, свободной будет x_3. Выразим главные неизвестные через свободную:

$$\begin{cases} k_1 = -k_2 - 2k_3 \\ k_2 = -k_3 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -(-k_3) - 2k_3 = -k_3 \\ k_2 = -k_3 \end{cases} \sim \begin{cases} k_1 = -k_3 \\ k_2 = -k_3 \end{cases} \sim \begin{cases} k_1 = -\mathrm{c} \\ k_2 = -\mathrm{c}, \quad c \in \mathbb{R}. \\ k_3 = \mathrm{c} \end{cases}$$

Выпишем множество всех решений системы:

$$M = \{(-c; -c; c) \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Получили, что верное равенство

$$k_1 a + k_2 b + k_3 c = \mathbf{0}, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R},$$

можно получить бесконечным числом способом:

$$\begin{cases} k_1 = -c \\ k_2 = -c, \quad c \in \mathbb{R}. \\ k_3 = c \end{cases}$$

Например, при $c = 0$ получаем

$$0a + 0b + 0c = \mathbf{0};$$

при $c = 1$

$$-a - b + c = \mathbf{0}$$
$$-(1,-1,1) - (1,2,2) + (2,1,3) = (0,0,0);$$

при $c = -2$

$$2a + 2b - 2c = \mathbf{0}$$
$$2(1,-1,1) + 2(1,2,2) - 2(2,1,3) = (0,0,0).$$

В общем виде:

$$-ca - cb + c = \mathbf{0}$$
$$-c(1,-1,1) - c(1,2,2) + c(2,1,3) = (0,0,0)\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ответ. $-c(1,-1,1) - c(1,2,2) + c(2,1,3) = (0,0,0)\,, \quad c \in \mathbb{R}.$

Задача 3. При каких значениях λ и как с помощью операций сложения и умножения на число можно получить вектор $(5, \lambda, 7)$ из векторов $(1,0,2)$ и $(-1,0,1)$?

Решение.

Запишем указанную зависимость:

$$k_1(1,0,2) + k_2(-1,0,1) = (5, \lambda, 7), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Подставим значения векторов a, b, c:

$$k_1(1,0,2) + k_2(-1,0,1) = (5, \lambda, 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k_1, 0, 2k_1) + (-k_2, 0, k_2) = (5, \lambda, 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(k_1 - k_2,\ 0,\ 2k_1 + k_2\right) = (5, \lambda, 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 - k_2 = 5 \\ 0 = \lambda \\ 2k_1 + k_2 = 7 \end{cases}.$$

Получаем, что для выполнения указанной зависимости между данными векторами необходимо должно выполняться условие $0 = \lambda$. Проверим достаточно ли этого:

$$\begin{cases} k_1 - k_2 = 5 \quad +II \\ 2k_1 + k_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow 3k_1 = 12 \Rightarrow k_1 = 4 \Rightarrow 2 \cdot 4 + k_2 = 7 \Rightarrow k_2 = -1.$$

Итак, при $\lambda = 0$ получено единственное решение $k_1 = 4$, $k_2 = -1$, соответствующее равенству

$$4 \cdot (1,0,2) - (-1,0,1) = (5,0,7).$$

Таким образом, условие задачи выполняется только при $\lambda = 0$.

Ответ. $\lambda = 0$.