Системы линейных уравнений. Метод гаусса. Часть 2

Частное решение системы – это каждое решение системы.

Общее решение системы – совокупность всех частных решений системы, записанная с помощью параметров.

Метод Гаусса – метод решения любых систем линейных уравнений, основанный на идее сведения с помощью элементарных преобразований СЛУ (ее матрицы) к равносильной ступенчатой, а затем последовательного выражения неизвестных.

Теорема. *С помощью элементарных преобразований получается система (матрица), эквивалентная данной.*

Теорема. *Любую ненулевую СЛУ (ненулевую матрицу) с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.*

Теорема. *Для любой ступенчатой системы линейных уравнений возможен точности один из случаев:*
1. Система имеет противоречивое уравнение и значит не имеет решений, то есть является несовместной.
2. В системе нет противоречивого уравнения. Тогда
– либо число уравнений системы равно числу неизвестных, и такая система имеет ровно одно решение,
– либо число уравнений меньше числа неизвестных, и система имеет бесконечно много решений.

Пример решения совместной СЛУ (имеющей бесконечно много решений, зависящих от одного параметра) методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}.$$

В соответствующей матрице ведущий элемент первой стирки 1, поэтому мы легко сможем обнулить элементы первого столбца под ведущим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -I \\ -2I \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице последние две строки пропорциональны. Значит, после преобразований из двух останется одна:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ -2II \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу, в которая соответствует СЛУ без противоречивого уравнения из 2-х уравнений от 3-х неизвестных. Уравнений меньше неизвестных, значит решений будет бесконечно много. Свободная неизвестная будет одна (1=3-2).
Запишем соответствующую ступенчатую систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 = 0 \end{cases}.$$

На следующем шаге нам нужно определиться с тем, какая известная будет свободной, а какие неизвестные будут через неё выражаться, то есть будут главными неизвестными. Для этого поступают следующим образом: главными неизвестными называют те, которые стоят в каждом уравнении первыми (при ненулевых коэффициентах). Оставшиеся неизвестные будут свободными.

В нашем случае

главными будут x_1 и x_3,

а свободной – неизвестная x_2.

Значит, x_2. будет принимать произвольные числовые значения, а главные неизвестные x_1 и x_3 должны быть через нее выражены.

Выражаем главное неизвестное через свободную:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - x_2, \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

либо так:

$$\begin{cases} x_2 = c \\ x_3 = 0 \\ x_1 = 1 - c \end{cases}, c \in \mathbb{R}.$$

Запишем множество решений системы:

$M = \{(1-c; \quad c; \quad 0) \mid c \in \mathbb{R}\}$.

Пример решения совместной СЛУ (имеющей бесконечно много решений, зависящих от нескольких параметров) методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 9 \end{cases}.$$

Приведем соответствующую ей матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ -2I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Получили ступенчатую матрицу, соответствующую СЛУ без противоречивых уравнений с 2-мя уравнениями и 4-мя неизвестными. Значит система имеет бесконечно много решений, зависящих от 2-х (=4-2) свободных переменных.

Запишем соответствующую ступенчатую систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ \qquad\qquad\quad x_4 = 1 \end{cases}$$

Те неизвестные, которые стоят в начале каждого уравнения (с не нулевым

коэффициентом) назначим главными, а оставшиеся – свободными:
x_1 и x_4 – главные,
x_2 и x_3 – свободные.
Выразим главные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_4 = 1 \\ x_1 = 3 - x_2 - 2x_3 \end{cases} \sim \begin{cases} x_2 = c \\ x_3 = d \\ x_4 = 1 \\ x_1 = 3 - c - 2d \end{cases}, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Запишем множество решений системы:
$M = \{(3 - c - 2d; \quad c; \quad d; \quad 1) \mid c,\ d \in \mathbb{R}\}$.