Системы линейных уравнений. Элементарные преобразования

Уравнением называется равенство двух алгебраических выражений, зависящих от некоторого набора переменных $x_1, \ldots, x_n$ и имеющее вид:
$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$,
где f и g – функции от данных переменных.
Переменные $x_1, \ldots, x_n$ также называют неизвестными уравнения.

Линейное уравнение – это уравнение вида
$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$.

Коэффициенты уравнения (СЛУ) – числа $a_1, \ldots, a_2, b$ при неизвестных уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$.

Свободный коэффициент (или свободный член) – число b в уравнении $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$.

n-ка – упорядоченный набор из n элементов $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Обозначается с помощью круглых скобок следующим образом: $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$.

Решение уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ – последовательность чисел $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, при подстановке которых вместо переменных, уравнение обращается в верное равенство. При этом число r_1 подставляется вместо переменной x_1, r_2 – вместо переменной x_2 и т. д. В дальнейшем мы часто будем работать с подобными упорядоченными наборами, которые в общем случае называют n-ками. Если n=2, то n-ку называют парой, если n=3, – тройкой, и т. д.

Решить уравнение означает, найти все его решения, или доказать, что решений нет.

Равносильные уравнения (или эквивалентные) – уравнения, имеющие одно и то же множество решений. Для обозначения равносильных уравнений используем знаки $\Leftrightarrow$ и $\sim$.

Нулевое уравнение – линейное уравнение, все коэффициенты которого (и слева, и справа) равны 0:
$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$.

Схема задания множества:
$\{\, \alpha \mid \text{характеристика } \alpha \}$ –
вначале внутри фигурных скобок указывают обозначение элементов, из которых состоит множество, затем ставят черту, после которой записывают, каким свойством характеризуются элементы этого множества.

$\mathbb{R}$ – обозначение множество всех действительных чисел.

Противоречивое уравнение – линейное уравнение, в котором все коэффициенты при переменных равны 0, а свободный коэффициент не равен 0:
$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b \neq 0 \quad \sim \quad 0 = b.$

$\emptyset$ – пустое множество.

Система линейных уравнений (СЛУ) – система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Первый индекс обозначает номер уравнения в системе, второй индекс соответствует индексу переменной. Отметим, что, в частности, параметр m может равняться 1, тогда система состоит из одного уравнения.

Решение СЛУ – любая n-ка чисел, являющаяся решением каждого уравнения этой системы.

Решить систему означает, найти все ее решения, или доказать, что решений нет.

Несовместная система – система, которая не имеет решений (то есть множество решений пусто).

Совместная система – система, имеющая хотя бы одно решение.

Элементарные преобразования систем линейных уравнений:
1 тип: умножение обеих частей уравнения системы на ненулевое число (пример такого преобразования был выше рассмотрен).
2 тип: прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число (складываем уравнения почленно). В частности, можно просто к одному уравнению прибавить другое. Вместо операции сложения можно выполнять вычитание.
3 тип: перестановка уравнений местами.
4 тип: удаление из системы или добавление нулевого уравнения.
Указанные типы преобразований не изменяют множество решений системы, то есть получаемая система является равносильной исходной. Поэтому эти преобразования можно использовать для поиска решений систем.

Матрица – прямоугольная таблица чисел (элементов матрицы), содержащая конечное число строк одинаковой длины: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Расширенная матрица системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

– матрица, составленная из коэффициентов системы следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Элементарные преобразования матриц:

1 тип: умножение любой строки матрицы на ненулевое число, то есть каждый элемент строки умножается на указанное число.

2 тип: прибавление к одной строке другой, умноженной на число, то есть к каждому элементу строки прибавляем соответствующий элемент другой строки, умноженный на указанное число. В частности, из одной строки можно вычесть другую строку, умноженную на число.

3 тип: перестановка строк местами.

4 тип: удаление или приписывание нулевой строки, то есть троки, состоящей из одних нулей. Рассмотрим примеры.

Пропорциональные строки матрицы – две строки, одна из которых равна другой, умноженной на число.