Лекция 3.

Системы линейных уравнений. Метод гаусса. Часть 2

На данной лекции рассмотрим системы, которые имеют бесконечное число решений.

Начнем с примера ступенчатой системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ \qquad\quad x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Здесь нет возможности однозначно найти значения неизвестных.

Заметим, что если мы подставим вместо переменной x_3 конкретное числовое значение, например 0, то получим ступенчатую матрицу, в которой можно будет последовательно снизу вверх найти значение неизвестных x_2 и x_1:

$$x_3 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3 \cdot 0 = 2 \\ \qquad\quad x_2 + 2 \cdot 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 1 \text{ и } x_1 = 0.$$

Имеем частное решение данной системы – тройку (0, 1, 0). Подставляя вместо x_3 различные числовые значения, мы получим бесконечно много различных решений системы. Если мы рассмотрим все варианты значений для x_3, то есть все действительные числа, то получим все множество решений системы.

Запишем множество всех решений данной системы единым выражением, то есть в виде общего решения.

Для этого будем считать x_3 параметром, принимающим любое числовое значение. Последовательно выразим (снизу вверх) значения оставшихся неизвестных x_2 и x_1 через параметр x_3:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ \qquad\quad x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_2 = 1 - 2x_3 \\ x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_3 = 2 - 2(1 - 2x_3) - 3x_3 = x_3 \end{cases}.$$

Раз переменная x_3 принимает любые значения, ее называют свободной переменной, в отличие от зависимых переменных x_1 и x_2, их называют главными переменными.

Для того, чтобы подчеркнуть свободу переменной x_3, ее можно переобозначить как параметр c:

$$\sim \begin{cases} x_3 = c \qquad (c - \text{любое число}) \\ x_2 = 1 - 2c \\ x_1 = 2 - 2(1 - 2c) - 3c = c \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 1 - 2c\,,\ c \in \mathbb{R} \\ x_3 = c \end{cases}$$

Общее решение системы можно записать как тройку чисел:

$$(c; \quad 1 - 2c; \quad c), \text{ где } c - \text{любое число.}$$

Отметим, что для записи решения можно только указать значения неизвестных:

$$x_1 = x_3,\ \ x_2 = 1 - 2x_3,\ x_3 \text{ – свободная неизвестная}$$

или

$$x_1 = c,\ \ x_2 = 1 - 2c,\ \ x_3 = c,\ \ c - \text{любое число.}$$

Итак, множеством решений данной системы является множество

$$M = \{(c;\quad 1 - 2c;\quad c) \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Для решения произвольной системы будем использовать метод Гаусса. Напомним факты, на которые он опирается.

Теорема. *С помощью элементарных преобразований получается система (матрица), эквивалентная данной.*

Теорема. *Любую ненулевую СЛУ (ненулевую матрицу) с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду*.

Теорема. *Для любой ступенчатой системы линейных уравнений возможен точности один из случаев:*

1. Система имеет противоречивое уравнение и значит не имеет решений, то есть является несовместной.

2. В системе нет противоречивого уравнения. Тогда

– либо число уравнений системы равно числу неизвестных, и такая система имеет ровно одно решение,

– либо число уравнений меньше числа неизвестных, и система имеет бесконечно много решений.

В исследованной выше ступенчатой системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ \qquad\quad x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

число строк (две строки) меньше числа переменных (три переменных). Поэтому мы могли сразу оценить, что система имеет бесконечно много решений. Более того, можно было сказать, что количество свободных переменных равно 3 – 2 = 1 (число переменных минус число уравнений в ступенчатой матрице).

Рассмотрим другой пример системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}.$$

В соответствующей матрице ведущий элемент первой строки равен 1, поэтому мы легко сможем обнулить нужные элементы первого столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ -2I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице последние две строки пропорциональны. Значит, после элементарного преобразования получится нулевая строка, которую затем вычеркнем:

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -2II\end{matrix} \sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Имеем ступенчатую матрицу, которая соответствует СЛУ без противоречивого уравнения. В этой системе два уравнения с тремя переменными. Уравнений меньше неизвестных, значит, решений будет бесконечно много. Свободная переменная одна.

Запишем соответствующую ступенчатую систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ = \ 1 \\ \qquad\qquad\ \ x_3 \ = \ 0 \end{cases}.$$

На следующем шаге нужно определиться с тем, какая переменная будет свободной, а какие переменная будут через неё выражаться, то есть будут главными переменными. Для ответа на этот вопрос поступают следующим образом: главными переменными называют те, которые стоят в каждом уравнении ступенчатой системы первыми (при ненулевых коэффициентах). Оставшиеся переменные будут свободными.

В нашем случае x_1 и x_3 – главные переменные, x_2 – свободная. Переменная x_2 принимает произвольные числовые значения, а x_1 и x_3 должны быть через нее выражены. Выражаем:

$$\begin{cases} x_3 \ = \ 0 \\ x_1 \ = \ 1 - x_2 - x_3 = 1 - x_2, \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

либо так:

$$\begin{cases} x_2 = c \\ x_3 \ = \ 0 \\ x_1 \ = \ 1 - c \end{cases}, c \in \mathbb{R}.$$

Запишем множество решений системы:

$$M = \{(1 - c; \quad c; \quad 0) \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Рассмотрим следующий пример системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ + 3x_4 \ = 9 \end{cases}.$$

Приведем соответствующую ей матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ -2I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу, которой соответствует СЛУ без противоречивых уравнений с 2-мя уравнениями и 4-мя переменными. Значит, система имеет бесконечно много решений, зависящих от двух свободных переменных.

Запишем соответствующую ступенчатую систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ \qquad\qquad\quad x_4 = 1 \end{cases}$$

Те переменные, которые стоят в начале каждого уравнения (с ненулевым коэффициентом) назначим главными, а оставшиеся – свободными:

x_1 и x_4 – главные,

x_2 и x_3 – свободные.

Выразим главные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_4 = 1 \\ x_1 = 3 - x_2 - 2x_3 \end{cases} \sim \begin{cases} x_2 = c \\ x_3 = d \\ x_4 = 1 \\ x_1 = 3 - c - 2d \end{cases}, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Запишем множество решений системы:

$$M = \{(3 - c - 2d; \quad c; \quad d; \quad 1) \mid c,\ d \in \mathbb{R}\}.$$

В заключение приведем возможные геометрические интерпретации множества решений СЛУ от 2-х и 3-х неизвестных с небольшим количеством уравнений.

Пусть дана система вида

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases},$$

в которой $a \neq 0$ или $b \neq 0$ для первого уравнения, также $a_1 \neq 0$ или $b_2 \neq 0$ для второго уравнения.

Геометрически система соответствует двум прямым, заданным в системе координат Oxy данными уравнениями:

$$l\colon\ ax + by = c$$

$$l_1\colon\ a_1x + b_1y = c_1$$

Имеется ровно три варианта взаимного расположения прямых на плоскости:

1) Пересечение прямых (рис. 1).

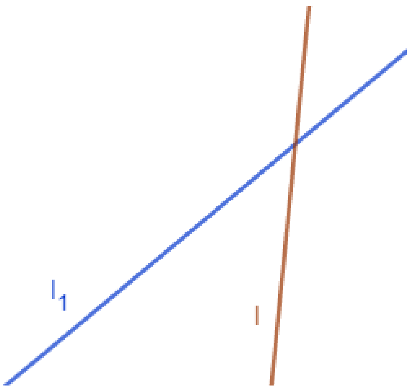

Рис. 1

В этом случае система имеет одно решение, соответствующее точке пересечения.

2) Параллельность прямых (рис. 2).

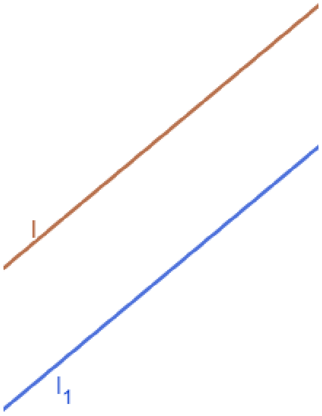

Рис. 2

Очевидно, что соответствующая таким прямым система решений не имеет.

3) Совпадение прямых (рис. 3).

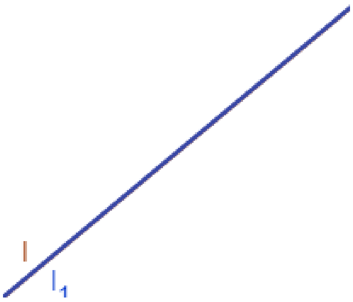

Рис. 3

Здесь уравнения системы задают одну и ту же прямую. Система имеет бесконечно много решений, заданных этой прямой и зависящих от одной свободной переменной.

Возьмем систему вида

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \end{cases},$$

в которой хотя бы один из коэффициентов a, b или c не равен 0 для первого уравнения и хотя бы один из коэффициентов a_1, b_1 или $c_1 \neq 0$ для второго уравнения.

Геометрически система соответствует двум плоскостям, заданным в системе координат $Oxyz$ данными уравнениями:

$$\alpha:\ ax + by + cz = d,$$

$$\alpha_1:\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1.$$

Имеется ровно три варианта взаимного расположения плоскостей в пространстве:

1) Пересечение плоскостей (рис. 4).

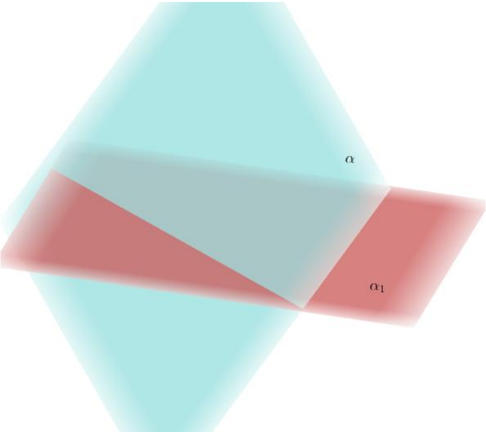

Рис. 4

В случае пересекающихся плоскостей система имеет бесконечно много решений, которые соответствуют прямой пересечения. Общее решение зависит от одной свободной переменной.

2) Параллельность плоскостей (рис. 5).

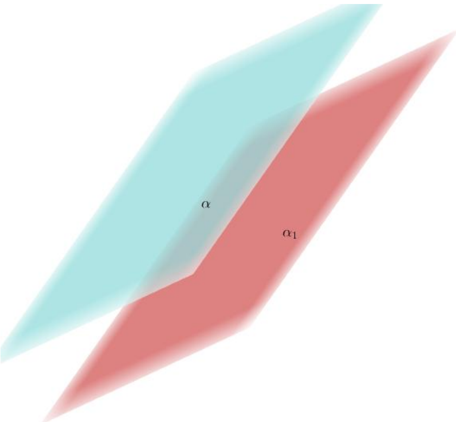

Рис. 5

Если плоскости параллельны, то система решений не имеет.

3) Совпадение плоскостей (рис. 6).

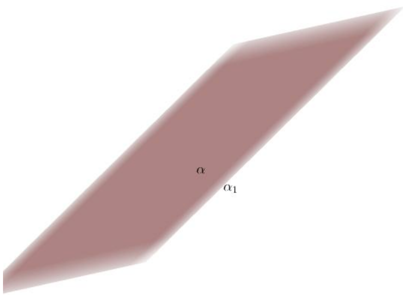

Рис. 6

Получаем, что уравнения системы задают одну и ту же плоскость. Система имеет бесконечно много решений, заданных этой плоскостью и определяемых двумя свободными переменными (в уравнении плоскости две свободных и одна зависимая переменная).

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases},$$

в которой для каждого уравнения хотя бы один из коэффициентов при неизвестных не равен 0.

Геометрически система соответствует трем плоскостям, заданным в системе координат $Oxyz$ данными уравнениями:

$$\alpha\colon\ ax + by + cz = d$$
$$\alpha_1\colon\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$\alpha_2\colon\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

Имеем следующие варианты взаимного расположения плоскостей в пространстве:

1) Все три плоскости совпадают (рис. 7).

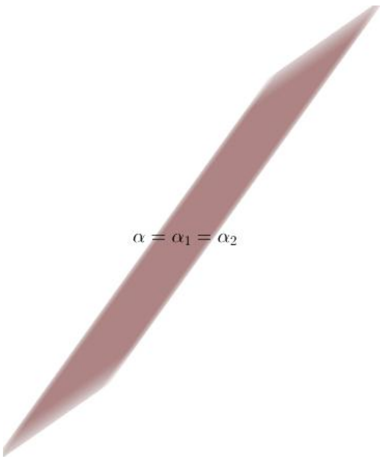

Рис. 7

В этом случае система имеет бесконечно много решений, заданных общей плоскостью и определяемых двумя свободными переменными.

2) Какие-то две плоскости параллельны (рис. 8).

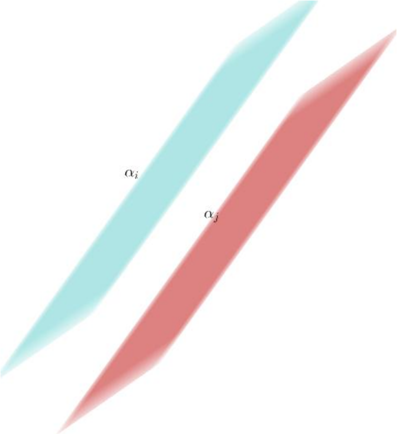

Рис. 8

Поскольку какие-то две плоскости не имеют общих точек, то и все три плоскости общих точек иметь не будут. Значит, соответствующая система решений не имеет.

3) Пусть совпадающих и параллельных плоскостей нет. Известно, что две плоскости пересекаются по прямой. Поэтому получаем следующие варианты.

3.1) Все три прямые пересечений пересекаются в одной точке (рис. 9).

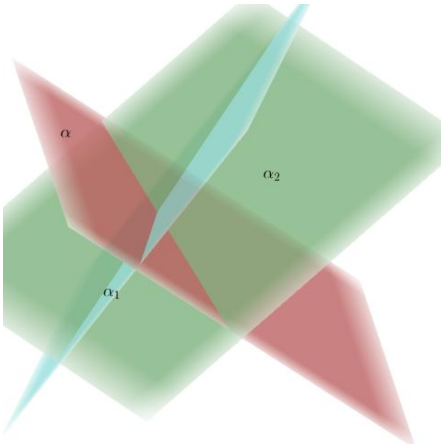

Рис. 9

В этом случае система имеет одно решение, соответствующее точке пересечения.

3.2) Прямые пересечений не имеют общих точек, то есть параллельны (рис. 10).

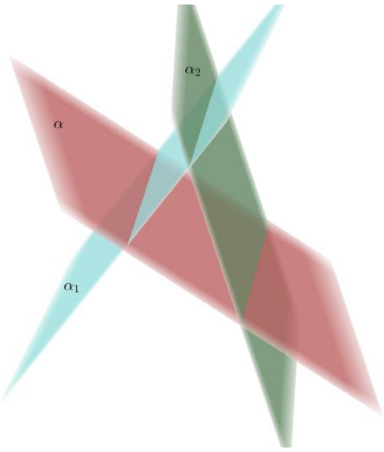

Рис. 10

Система не имеет решений, то есть несовместна.

3.3) Прямые пересечений совпадают (рис. 11).

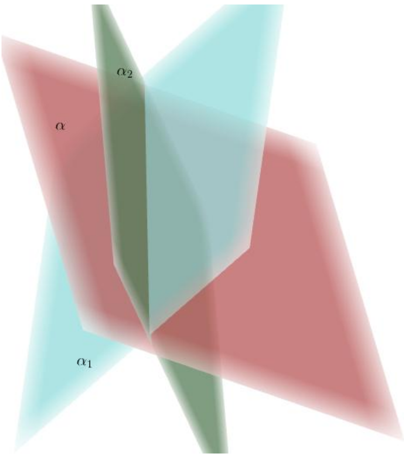

Рис 11

Тогда заданная плоскостями система имеет бесконечно много решений. Это решение задается прямой пересечения и зависит от одной свободной переменной.