Практика 2.

Метод Гаусса

Задача 1. Решите систему линейных уравнений $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 1 \end{cases}$.

Решение.

Запишем матрицу данной системы:

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

В матрице ведущий элемент первой строки 7. Для удобства вычислений сведем его к 1. Для этого вычтем из первой строки матрицы три ее последние строки:

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \\ -2I \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 & -14 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обнулим все элементы первого столбца под ведущим:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 & -14 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \\ -2I \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 & -14 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 18 & 0 & 33 & 3 \end{pmatrix}.$$

Перейдем ко второму столбцу: обнулим все элементы под ведущим:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 & -14 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 18 & 0 & 33 & 3 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ -3II \\ -18II \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 & -14 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -15 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу. Перейдем к соответствующей системе:

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 - 14x_4 = -1 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ -2x_3 - 3x_4 = 3 \\ 15x_4 = -15 \end{cases}.$$

Последовательно снизу-вверх находим значение неизвестных:

$15x_4 = -15 \Rightarrow x_4 = -1;$

$-2x_3 - 3x_4 = 3 \Rightarrow -2x_3 - 3 \cdot (-1) = 3 \Rightarrow -2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0;$

$x_2 + x_4 = 1 \Rightarrow x_2 + (-1) = 1 \Rightarrow x_2 = 2;$

$x_1 - 8x_2 - 14x_4 = -1 \Rightarrow x_1 - 8 \cdot 2 - 14 \cdot (-1) = -1 \Rightarrow x_1 = 1.$

Получили одно решение $(1;2;0;-1)$, множество всех решений одноэлементно:

$$M = \{(1;2;0;-1)\}.$$

Ответ. $(1;2;0;-1)$.

Задача 2. При каких значениях параметра b система $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = b \end{cases}$ совместна?

Решение.

Требуется узнать, при каких значениях параметра b данная система совместна. Мы знаем, что система совместна (имеет одно решение либо бесконечно много решений), если соответствующая ей ступенчатая матрица не имеет противоречивого уравнения. Значит, следует привести систему к ступенчатому виду.

Запишем матрицу данной системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -3 & b \end{pmatrix}.$$

В матрице данной системы ведущий элемент первой строки 1. Обнулим все элементы первого столбца под ведущим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -3 & b \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -2I \\ -I \\ -I \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & b+1 \end{pmatrix}.$$

Далее обнулим элемент второго столбца под ведущим элементом:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & b+1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ +II \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & b+4 \end{pmatrix}.$$

Обнулим элемент третьего столбца под ведущим:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & b+4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ -III \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & b-5 \end{pmatrix}.$$

Вид полученной матрица зависит от значения параметра b. Возможны два случая:

1. $b - 5 = 0 \iff b = 5$. В этом случае последняя строка матрицы является нулевой:

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & -1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & -1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 9\end{pmatrix}.$$

В полученной ступенчатой матрице нет противоречивого уравнения, число строк равняется числу неизвестных. Значит в этом случае система имеет ровно одно решение.

2. $b-5\neq 0 \iff b\neq 5$. Получаем ненулевую последнюю строку:

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -1\\ 0 & -1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 9\\ 0 & 0 & 0 & b-5\end{pmatrix}.$$

Последняя строка соответствует противоречивому уравнению:

$$0=b-5$$

Значит при $b\neq 5$ система решений не имеет.

Итак, данная в условии задачи система совместна только лишь при $b=5$.

Ответ: $b=5$.