Линейные уравнения. Элементарные преобразования

Задача 1. Найти точку пересечения прямых l_1 и l_2:

l_1: $-4x - y = 2$

l_2: $4x + 3y = 2$

Решение. Действительно, прямые пересекаются, так как имеют разные угловые коэффициенты. Координаты точки пересечения прямых соответствуют решению системы, составленной из их уравнений:

$$\begin{cases} -4x - y = 2 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}.$$

Прибавим ко второму уравнению первое:

$$\begin{cases} -4x - y = 2 \\ 4x + 3y = 2 \; +I \end{cases} \sim \begin{cases} -4x - y = 2 \\ \quad 2y = 4 \end{cases}.$$

Получаем $y = 2 \Longrightarrow -4x - 2 = 2 \Longrightarrow x = 1$.

Решением системы будет пара $(1,2)$. Это координаты точки пересечения данных прямых:

$A = (1,2)$.

Ответ. $(1,2)$.

Задача 2. При каких значениях параметра a уравнение $(a^2 - 4)x = a + 2$

1) имеет одно решение;

2) имеет бесконечно много решений;

3) не имеет решений?

Решение.

Уравнение $(a^2 - 4)x = a + 2$, где $a \in \mathbb{R}$, имеет вид

$$kx = r, \text{ где } k, r \in \mathbb{R}.$$

Для уравнений такого вида возможен в точности один из случаев:

1. $k \neq 0 \Longrightarrow x = \frac{r}{k}$.

2. $k = 0, r \neq 0 \Longrightarrow 0x = r,\ r \neq 0 \Longrightarrow$ никакое значение x не будет решением уравнения: решений нет.

3. $k = 0, r = 0 \Longrightarrow 0x = 0 \Longrightarrow$ любое значение x будет решением уравнения: $x \in \mathbb{R}$.

По этой же схеме исследуем уравнение $(a^2 - 4)x = a + 2$.

Но сначала для удобства вычислений разложим коэффициент при x на множители:

$$a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2).$$

Отметим, что в полученном уравнении

$$(a - 2)(a + 2)x = a + 2$$

для случая $a = -2$ деление частей уравнения на $(a + 2)$ не будет равносильным преобразованием и приведет к потере решений. Поэтому делить (либо умножать) на выражение с параметром мы не будем.

Итак, для уравнения

$$(a - 2)(a + 2)x = a + 2$$

возможны ровно три случая:

1. $(a - 2)(a + 2) \neq 0 \Longrightarrow x = \frac{a+2}{(a-2)(a+2)}$ – это единственное решение данного уравнения, вычисляемое подстановкой значения параметра a. В этом случае a не обращает знаменатель в 0. Выпишем все такие значения a:

$$(a - 2)(a + 2) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2 \text{ и } a \neq -2.$$

2. $(a - 2)(a + 2) = 0, a + 2 \neq 0 \Longrightarrow 0x = a + 2 \neq 0 \Longrightarrow$ решений нет. Выпишем соответствующие значения a:

$$(a - 2)(a + 2) = 0 \text{ и } a + 2 \neq 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

3. $(a - 2)(a + 2) = 0,\ a + 2 = 0 \Longrightarrow 0x = 0 \Longrightarrow$ любое значение x будет решением уравнения: $x \in \mathbb{R}$. Выпишем значения a:

$$(a - 2)(a + 2) = 0 \text{ и } a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2.$$

Получили, что данное уравнение имеет:

1) одно решение при $a \neq 2; -2$;

2) бесконечно много решений при $a = -2$;

3) не имеет решений при $a = 2$.

Ответ. 1) одно решение при $a \neq 2; -2$;

2) бесконечно много решений при $a = -2$;

3) нет решений при $a = 2$.

Задача 3. При каких значениях a система линейных уравнений $\begin{cases} ax + y = a \\ ax + ay = 1 \end{cases}$ имеет одно решение? Найдите это решение.

Решение.

Для ответа на вопрос задачи приведем данную систему к более простому виду с помощью равносильных преобразований:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ ax + ay = 1 \end{cases}.$$

Вычитаем из первого уравнения второе:

$$\begin{cases} ax + y = a \quad -II \\ ax + ay = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} (1 - a)y = a - 1 \\ ax + ay = 1 \end{cases}.$$

Нам нужно узнать, при каких значениях a данная система (а значит и полученная нами равносильная ей) имеет одно решение Для исследования системы выпишем сначала все варианты для множества решений уравнения:

$$(1 - a)y = a - 1.$$

Заметим, что для совместности системы это уравнение не должно быть противоречивым. Значит, для него возможны два случая:

1. имеет единственное решение $y = \frac{a-1}{1-a} = -1$ при

$$(1 - a) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1.$$

2. любое значение y будет решением при:

$$(1 - a) = 0 \text{ и } 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Для каждого случая исследуем полученную систему:

1. $a \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ ax + ay = 1 \end{cases} \Rightarrow ax + a(-1) = 1 \Rightarrow ax = 1 + a.$

Решение уравнения

$$ax = 1 + a$$

зависит от значения параметра a:

– если $a \neq 0$, то поделим уравнение на a (умножим на ненулевое число $\frac{1}{a}$) и получим $x = \frac{a+1}{a}$.

– если $a = 0$, то уравнение $0x = 1 + 0$ решений не имеет, а значит не имеет решений и вся система.

В итоге для первого случая получаем:

– при $a \neq 1$ и $a \neq 0$ система имеет одно решение $x = \frac{a+1}{a}, y = -1$;

– при $a = 0$ система решений не имеет.

2. $a = 1 \Longrightarrow \begin{cases} 0y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \sim \{x + y = 1$. В этом случае система имеет бесконечно много решений.

Итак, одно решение $x = \frac{a+1}{a}, y = -1$ получим только при значениях $a \neq 1$ и $a \neq 0$.

Ответ: $a \neq 0; 1 \ \Rightarrow \ x = \frac{a+1}{a}, y = -1$