Криволинейные интегралы первого и второго рода: определение, свойства, вычисление.

Задание 1. Вычислить криволинейный интеграл 1 рода $\int\limits_L xy\,dl$ по прямой, соединяющей точки $A(0,0)$ и $B(2,4)$.

Решение. Уравнение прямой, соединяющая точки $A(0,0)$ и $B(2,4)$ имеет вид $y=2x$.

Кривая задана явно $y=y(x)$, параметром выступает переменная x. Дифференциал дуги находится по формуле:

$$dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx,\quad x_1\le x\le x_2;$$

$$J=\int\limits_z f(x,y)dl=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

$$\int\limits_L xy\,dl=\int\limits_0^2 (x\cdot 2x)\sqrt{1+((2x)')^2}\,dx=\int\limits_0^2 2x^2\cdot\sqrt{5}dx=2\sqrt{5}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{16\sqrt{5}}{3}.$$

Задание 2. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x+2y)\,dl$ вдоль кривой

$$\begin{cases} x=\sin^3 t \\ y=\cos^3 t \end{cases},\quad t\in\left[\pi,\frac{3}{2}\pi\right].$$

Решение. Кривая задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases};\quad dl=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt,\qquad t_1\le t\le t_2.$$

$$J=\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt.$$

$$\int\limits_L (x+2y)\,dl=\int\limits_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}(\sin^3 t+2\cos^3 t)\sqrt{(3\sin^2 t\cos t)^2+(-3\cos^2 t\sin t)^2}\,dt=$$

$$=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}(\sin^3 t+2\cos^3 t)\sqrt{9\sin^4 t\cos^2 t+9\cos^4 t\sin^2 t}\;dt=$$

$$=3\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}(\sin^3 t+2\cos^3 t)\sqrt{\frac{4}{4}\sin^2 t\cos^2 t}\;dt=\frac{3}{2}\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}(\sin^3 t+2\cos^3 t)\,\left|\sin 2t\right|\,dt\,.$$

При $t\in\left[\pi,\frac{3}{2}\pi\right]$ значения $\sin 2t\geq 0$, $\left|\sin 2t\right|=\sin 2t$.

$$J=\frac{3}{2}\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}(\sin^3 t+2\cos^3 t)\sin 2t\,dt=3\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sin^4 t\cos t\,dt+6\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\cos^4 t\sin t\,dt=$$

$$=3\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\sin^4 t\,d(\sin t)-6\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\cos^4 t\,d(\cos t)=3\frac{\sin^5 t}{5}\Bigg|_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}-6\frac{\cos^5 t}{5}\Bigg|_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}=$$

$$=\frac{3}{5}(-1-0)-\frac{6}{5}(0+1)=-\frac{9}{5}.$$

Задание 3. Вычислить криволинейный интеграл 2 рода $\int_L x^2dx+xy\,dy$ вдоль кривой L из точки $A(0,1)$ в точку $B(1,0)$:

1) L: прямая;

2) L: окружность $x^2+y^2=1$.

Решение.

1) Уравнение прямой, соединяющей точки $A(0,1)$ и $B(1,0)$, имеет вид $y=1-x$. Переменная x принимает значения: $0\leq x\leq 1$:

$$\int_L x^2dx+xydy=\int_0^1\left[x^2+x(1-x)(-1)\right]dx=\int_0^1\left(2x^2-x\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

.

2) Переход из точки в точку $B(1,0)$ происходит по окружности $x^2+y^2=1$. Для окружности вводим параметризацию $\begin{cases}x=\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases}$, $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$, $\varphi_2=0$.

$$\int_L x^2 dx + xy\,dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi\, d\varphi + \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi\, d\varphi = 0\,.$$

Задание 4. Вычислить работу силы $F(3x^2 y,\quad x^3+1)$ вдоль кривой L из точки $A(0,0)$ в точку $B(1,1)$:

1) L: прямая;

2) L: парабола.

Решение.

Работа выражается через криволинейный интеграл 2 рода.

Следовательно, необходимо вычислить криволинейный интеграл 2 рода $\int_L 3x^2 y dx + \left(x^3+1\right)dy$ вдоль кривой L из точки $A(0,0)$ в точку $B(1,1)$, если

1) L: прямая;

2) L: парабола.

1) Переход из точки $(0,0)$ по прямой $y=x$ в точку $(1,1)$:

$$\int_0^1 3x^3 dx + \left(x^3+1\right)dx = \int_0^1 \left(4x^3+1\right)dx = \left(x^4+x\right)\Big|_0^1 = 2\,.$$

2) Переход из точки $(0,0)$ по параболе $y=x^2,\quad dy = 2x\,dx$ в точку $(1,1)$:

$$\int_0^1 3x^4 dx + \left(x^3+1\right)2xdx = \int_0^1 \left(5x^4+2x\right)dx = \left(x^5+x^2\right)\Big|_0^1 = 1+1 = 2\,.$$

Дополнительные задачи

1. Вычислить криволинейный интеграл 1 рода $\int_L (x+y)\,dl$ по прямой, соединяющей точки $A(0,0)$ и $B(2,4)$.

(Отв. $6\sqrt{5}$);

2. Вычислить криволинейный интеграл 1 рода $\int\limits_L (\frac{x}{y})\,dl$ вдоль линии L, заданной уравнением $y=\sqrt{2x}$ от точки $A(1,\sqrt{2})$ до $B(2,2)$.

(Отв. $\frac{5\sqrt{5}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$);

3. Вычислить криволинейный интеграл 2 рода $\int\limits_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$ вдоль линии L, заданной уравнением $y=x^2$, $x\in[-1,1]$.

(Отв. $\frac{-14}{15}$);

4. Вычислить работу силы $F(x-y,\ 1)$ вдоль полуокружности $x^2+y^2=4,\quad y\geq 0$ при перемещении материальной точки от $A(2,0)$ до $B(-2,0)$.

(Отв. 2π).