Двойной интеграл: определение, свойства, вычисление в декартовых и полярных координатах (Часть 2)

Задание 1. Расставить пределы интегрирования в полярных координатах по области D для функции $z = f(x, y)$. если область интегрирования D определяется неравенствами:

1) $x^2 + y^2 \le R^2$, $x \ge 0$, $y \le 0$;
2) $x^2 + y^2 \le 4x$, $\quad x^2 + y^2 \ge 4$.

Решение.

1) область D – часть круга с центром в начале координат, радиуса R (рис.1).

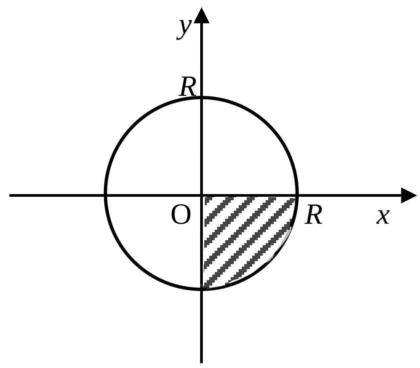

Рис.1

Полярный угол φ меняется от $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ до 0, полярный радиус r меняется от 0 до R. Таким образом, область D в полярной системе координат определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le 0, \\ 0 \le r \le R. \end{cases}$$

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \int\limits_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr$$

2) $x^2 + y^2 \ge 4$ – область за пределами круга с центром в начале координат, радиуса 2;

$x^2 + y^2 \le 4x$ – круг с центром в точке $(2;0)$ радиуса 2.

Координаты центра и радиус можно определить, выделив в левой части уравнения полные квадраты:

$$x^2 + y^2 - 4x = 0,$$

$$(x^2 - 4x + 4) + y^2 - 4 = 0,$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4.$$

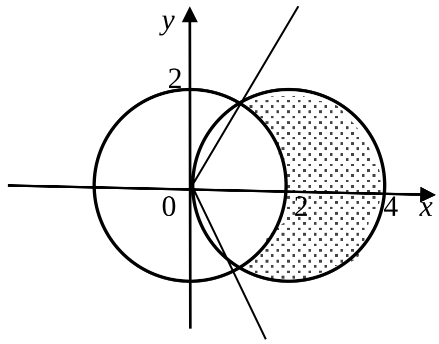

Рис. 2

Рассмотрим уравнения линий, ограничивающих область D: 1) $x^2 + y^2 = 4$, 2) $x^2 + y^2 = 4x$. Перейдем по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$; $dxdy = r\,d\varphi\,dr$ к уравнениям этих линий, в полярной системе координат:

1) $r = 2$;

2) $r = 4\cos\varphi$.

Следовательно, полярный радиус r меняется от 2 до $4\cos\varphi$.

Найдем пределы изменения угла φ (на рисунке они показаны лучами). Для этого решим систему:

$$\begin{cases} r = 2 \\ r = 4\cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow 4\cos\varphi = 2 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0{,}5 \Leftrightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z\,.$$

В нашем случае угол φ меняется от $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ до $\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Таким образом, область D в полярной системе координат определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}, \\ 2 \le r \le 4\cos\varphi. \end{cases}$$

Записываем интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_2^{4\cos\varphi} f(x,y)\,r dr\,.$

Задание 2. Вычислить $\iint\limits_D e^{x^2+y^2} dx\,dy$, где область интегрирования $D: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2} \end{cases}.$

<u>Решение.</u> Область интегрирования представляет собой четверть круга (рис. 3), лежащая в первой четверти. Удобно перейти к полярным координатам $(r;\varphi)$:

$$e^{x^2+y^2} = e^{r^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} = e^{r^2}\,.$$

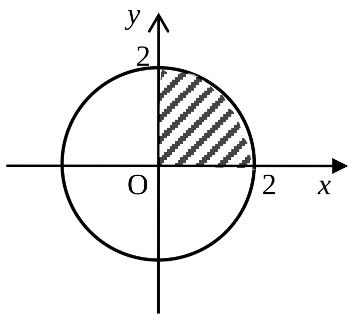

Рис.3

Область D в полярной системе координат определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \le r \le 2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 e^{r^2} r\,dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} e^{r^2}\Big|_0^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^4 - 1\right)d\varphi = \frac{1}{2}\left(e^4-1\right)\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\left(e^4-1\right).$$

Задание 3. Вычислить $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ по области D: $\frac{\pi^2}{4} \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2$.

<u>Решение.</u> Область интегрирования представляет собой кольцо (рис. 4), поэтому целесообразно перейти к полярным координатам, применяя формулы:

$$x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi;\;\; dxdy = r\,d\varphi dr\,.$$

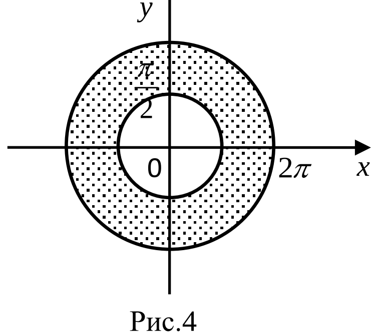

Рис.4

Область интегрирования D в полярной системе координат будет определяться системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ \dfrac{\pi}{2} \le r \le 2\pi. \end{cases}$$

$$\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_D \cos r \cdot r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} r\cos r dr.$$

Внутренний интеграл берем по частям и получаем:

Рис.8

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} r\cos r dr = \int_0^{2\pi}\left(r\sin r\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin r dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(r\sin r\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} + \cos r\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \right) d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{\pi}{2}+1\right) d\varphi =$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2}+1\right)\varphi\Big|_0^{2\pi} = \left(-\frac{\pi}{2}+1\right)\cdot 2\pi = 2\pi - \pi^2.$$

Дополнительные задачи

Вычислить интегралы, переходя к полярным координатам:

1) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2-9}\,dxdy$, где область D ограничена окружностями $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2=25$;

2) $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, где область $D-$ круг $x^2+y^2 \le a^2$.

Ответы: 1) $\dfrac{128}{3}\pi$; 2) $\pi\left(1-e^{-a^2}\right)$.