Двойной интеграл: определение, свойства, вычисление в декартовых и полярных координатах (Часть1)

Задание 1. Вычислить повторный интеграл: $\int\limits_1^3 dx \int\limits_x^{3x} \frac{y}{x} dy$.

<u>Решение</u>. Множитель $\frac{1}{x}$ не зависит от y и считается постоянным для внутреннего интеграла. Поэтому его можно вынести за знак внутреннего интеграла, т. е. перенести во внешний интеграл:

$$\int\limits_1^3 \frac{dx}{x} \int\limits_x^{3x} y dy = \int\limits_1^3 \frac{dx}{x} \left(\frac{y^2}{2} \Bigg|_x^{3x} \right) = \int \frac{dx}{x} \cdot \left(\frac{(3x)^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) = 4\int\limits_1^3 x dx = 4 \cdot \frac{x^2}{2} \Bigg|_1^3 = 16 \cdot$$

<u>Замечание.</u> При вычислении повторного интеграла следует помнить:

1) вычисление повторного интеграла следует начинать с вычисления внутреннего интеграла;
2) во внешнем интеграле пределы интегрирования константы;
3) во внутреннем интеграле пределы интегрирования есть функции той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл и при вычислении внутреннего интеграла она считается величиной постоянной;
4) в результате вычисления повторного интеграла должно получиться число.

Задание 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_D (2x + xy) dxdy$, где область D ограничена линиями $y = -x^3$, $y = \sqrt{x}$, $x = 1$.

<u>Решение.</u>

Изобразим область интегрирования D (рис. 1). Область D может быть определена системой

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ -x^3 \le y \le \sqrt{x}. \end{cases}$$

Расставляем пределы интегрирования:

$$\iint\limits_D (2x + xy) dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x^3}^{\sqrt{x}} (2x + xy) dy .$$

Вычисление интеграла начинаем с внутреннего, считая при этом x постоянной величиной:

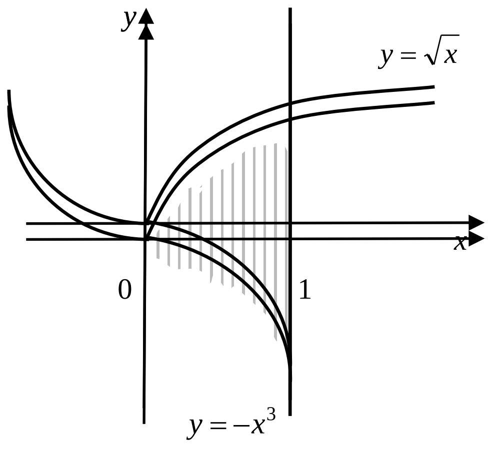

Рис.1

$$\int_0^1 dx\int_{-x^3}^{\sqrt{x}}(2x+xy)dy=\int_0^1\left(2xy+x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-x^3}^{\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int_0^1\left(\left(2x\sqrt{x}+x\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}\right)-\left(2x\left(-x^3\right)+x\frac{\left(-x^3\right)^2}{2}\right)\right)dx=\int_0^1(2x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2+2x^4-\frac{1}{2}x^7)dx=$$

$$=\left(\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{6}x^3+\frac{2}{5}x^5-\frac{1}{16}x^8\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{5}+\frac{1}{6}+\frac{2}{5}-\frac{1}{16}=1\frac{73}{240}.$$

Заметим, что внешнее интегрирование в данном решении мы выполнили по переменной x, а внутреннее по переменной y. Если же в повторном интеграле внешнее интегрирование выполнять по y, а внутреннее по x, то область интегрирования разбивается на две отдельные области D_1 и D_2 (рис. 1).

$$D_1:\begin{cases}-1\le y\le 0,\\ -\sqrt[3]{y}\le x\le 1\end{cases},\qquad D_2:\begin{cases}0\le y\le 1,\\ y^2\le x\le 1.\end{cases}$$

Применяя свойство аддитивности, запишем:

$$\iint_D(2x+xy)dxdy=\iint_{D_1}(2x+xy)dxdy+\iint_{D_2}(2x+xy)dxdy=\int_{-1}^{0}dy\int_{-\sqrt[3]{y}}^{1}(2x+xy)dx+\int_0^1 dy\int_{y^2}^{1}(2x+xy)dx$$

Таким образом, от выбора порядка интегрирования во многом зависит трудоемкость вычисления двойного интеграла.

Задание 3. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области D, ограниченной линиями $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=x+2$, $y=0$ для функции $z=f(x,y)$ двумя способами.

<u>Решение.</u>

Изобразим область интегрирования D на плоскости (рис. 2).

1) Чтобы применить формулу

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy,$$

необходимо разбить область интегрирования D на две D_1 и D_2:

$$D_1:\begin{cases}-2\le x\le 0,\\ 0\le y\le x+2;\end{cases}\qquad D_2:\begin{cases}0\le x\le 2,\\ 0\le y\le\sqrt{4-x^2}.\end{cases}$$

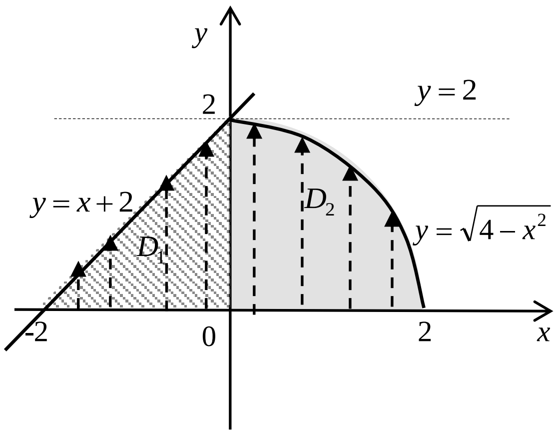

Рис. 2

Тогда

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{-2}^{0}dx\int_0^{x+2}f(x,y)dy+\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy.$$

2) Чтобы применить формулу $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$, необходимо выразить переменную x из уравнения $y=\sqrt{4-x^2}$: $x=\pm\sqrt{4-y^2}$, но так как нам нужна правая часть дуги, то $x=\sqrt{4-y^2}$ (левая часть дуги имеет уравнение $x=-\sqrt{4-y^2}$). Из уравнения $y=x+2$ получаем $x=y-2$ (рис. 3).

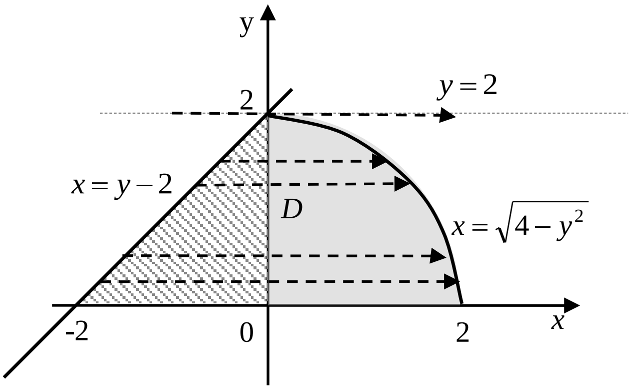

Рис. 3

Представим область D в виде системы неравенств

$$D:\begin{cases} 0\le y\le 2, \\ y-2\le x\le\sqrt{4-y^2}; \end{cases}$$

Таким образом, исходный двойной интеграл можно записать в виде

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y-2}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx.$$

Дополнительные задачи

1) Вычислить повторный интеграл: $\int\limits_1^3 dx \int\limits_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2}dy$.

2) Вычислить: $\iint\limits_D \frac{y^3}{x^2}dxdy$, где область D задана условиями: $y\ge\frac{1}{3}x$, $y\le\sqrt{x}$, $x\le 1$.

Ответы: 1) $\frac{10}{3}$; 2) $\frac{121}{486}$.