Экстремум функции двух переменных.
Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области

Задание. Исследовать на экстремум функции:

1) $f(x;y)=1+6x-x^2-xy-y^2$;

2) $f(x;y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ внутри квадрата $\{(x;y): 0<x<\pi, 0<y<\pi\}$.

Решение.

1) Область определения $D(f)=\mathrm{R}^2$ – вся плоскость *Oxy*.

Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6-2x-y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-x-2y.$$

Стационарные точки удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}-2x-y+6=0,\\ x+2y=0.\end{cases}$$

Решением этой системы является точка $M_0(4;-2)$.

Вторые частные производные данной функции постоянны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2,$$

поэтому в любой точке, в том числе и в точке $M_0(4;-2)$ имеем:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_0)=-2, \quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_0)=-1, \quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_0)=-2, \quad \Delta=AC-B^2=3.$$

Так как $\Delta>0$, а $A<0$, то точка $M_0(4;-2)$ – это точка максимума данной функции. При этом $z_{\max}=z(4;-2)=13$.

2) Область определения $D(f)=\mathrm{R}^2$ – вся плоскость *Oxy*. Однако, по условию задачи экстремум функции $f(x;y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ необходимо найти внутри открытого квадрата $\{(x;y): 0<x<\pi, 0<y<\pi\}$.

Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos x-\sin(x+y), \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\cos y-\sin(x+y).$$

Определим стационарные точки.

$$\begin{cases}\cos x-\sin(x+y)=0, & (1)\\ \cos y-\sin(x+y)=0. & (2)\end{cases}$$

Вычитая из уравнения (1) уравнение (2), получаем

$$\cos x-\cos y=0,$$

$$2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\sin\frac{x+y}{2}=0.$$

Следовательно, $\left[\begin{array}{ll} x-y=2\pi n, & n\in Z, \\ x+y=2\pi k, & k\in Z. \end{array}\right.$

В указанном квадрате может иметь место только условие $x-y=0$ ($n = 0$). Присоединив к полученному уравнению уравнение (1) исходной системы, получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} y=x, \\ \cos x-\sin(x+y)=0. \end{cases}$$

Решая систему, поучаем стационарные точки: $M_1\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$, $M_2\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и $M_3\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$.

Найдём частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin x-\cos(x+y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\cos(x+y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\sin y-\cos(x+y).$$

Для каждой точки вычисляем соответствующие A, B, C и определяем знак $\Delta=AC-B^2$:

$M_1\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$: $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_1)=-1$, $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_1)=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_1)=-1$,

$\Delta=\frac{3}{4}>0$, $A<0$, следовательно, в точке $M_1\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$ функция имеет максимум.

$M_2\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$: $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_2)=0$, $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_2)=1$, $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_2)=0$, $\Delta=-1<0$,

следовательно, точка $M_2\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ не является точкой экстремума.

$M_3\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$: $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_3)=-1$,

$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M_3)=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_3)=-1$,

$\Delta=\frac{3}{4}>0$, $A<0$, следовательно, в точке $M_3\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$ функция имеет максимум.

Таким образом, в данном квадрате функция $f(x;y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ имеет две точки максимума $M_1\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$ и $M_3\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$,

$$f_{\max}=f\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}.$$

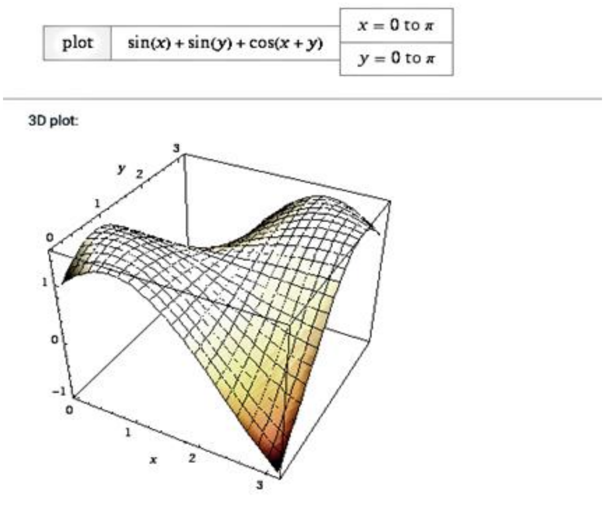

Рис. 1

На рис. 1 изображена поверхность, заданная уравнением $f(x;y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ на области $D=\{(x;y): 0<x<\pi, 0<y<\pi\}$.

Дополнительные задачи

Задание. Исследовать на экстремум функции:

1) $f(x;y)=4x^2y+y^2+24xy+32y-6$;

2) $f(x;y)=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin(x+y)$ внутри квадрата $\{(x;y):0<x<\pi,\,0<y<\pi\}$.

Ответы: 1) $f_{\min}=f(-3;2)=-10$;

2) $f_{\min}=f\left(\frac{2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$, $f_{\max}=f\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$.