Частные производные сложной функции и функции, заданной неявно. Производная по направлению, градиент

Задание 1. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = x^5 + 2xy - y^3$ и $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{arctg} t$.

Решение. Применяем формулу:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 + 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 3y^2, \quad \frac{dx}{dt} = -2\sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\frac{dz}{dt} = -2\left(5x^4 + 2y\right)\sin 2t + \left(2x - 3y^2\right)\frac{1}{1+t^2}.$$

В окончательном ответе можно как сохранить переменные x и y, так и выразить их через t $\dfrac{dz}{dt} = -2\left(5\cos^4 2t + 2\operatorname{arctg} t\right)\sin 2t + \left(2\cos 2t - 3\operatorname{arctg}^2 t\right)\dfrac{1}{1+t^2}$.

Задание 2. Найти частные производные сложной функции $z = x^2 \ln y$ где $x = \dfrac{u}{v}$, $y = uv$.

Решение. Найдем частные производные данных функций:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u.$$

Применяя формулы

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

получаем

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x(\ln y)\cdot\frac{1}{v} + \frac{x^2}{y}\cdot v = 2\frac{u}{v}\ln(uv)\cdot\frac{1}{v} + \frac{u^2}{v^2}\cdot\frac{1}{uv}\cdot v = \frac{u}{v^2}\left(2\ln uv + 1\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x(\ln y)\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{x^2}{y}\cdot u = 2\frac{u}{v}\ln(uv)\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{u^2}{v^2}\cdot\frac{1}{uv}\cdot u = \frac{u^2}{v^3}\left(-2\ln uv + 1\right).$$

Задание 3. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и dz функции $z = f(x;y)$, заданно неявно уравнением $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$.

Решение. Уравнение поверхности имеет вид $F(x;y;z) = 0$, где

$$F(x;y;z)=x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3.$$

Частные производные этой функции равны:

$$F'_x(x;y;z)=3x^2-3yz,\quad F'_y(x;y;z)=6y^2-3xz-2,\quad F'_z(x;y;z)=3z^2-3xy.$$

Применяя формулы $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}$, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3x^2-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{x^2-yz}{xy-z^2},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{6y^2-3xz-2}{3z^2-3xy}=\frac{6y^2-3xz-2}{3\left(xy-z^2\right)},$$

а по формуле дифференциала

$$dz=\frac{x^2-yz}{xy-z^2}dx+\frac{6y^2-3xz-2}{3\left(xy-z^2\right)}dy.$$

Задание 4. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности уравнением $x^2+3y^2-4z^2=15$ в точке $P_0(2;-3;2)$.

Решение. Обозначим $F(x;y;z)=x^2+3y^2-4z^2-15$. Имеем $F(2;-3;2)=0$,

$$F'_x=2x,\quad F'_y=6y,\quad F'_z=-8z,$$

$$F'_x(P_0)=4,\quad F'_y(P_0)=-18,\quad F'_z(P_0)=-16.$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x;y;z)=0$ в точке $P_0(x_0;y_0;z_0)$ может быть записано в виде:

$$F'_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0,$$

$$2(x-2)-9(y+3)-8(z-2)=0,$$

$$2x-9y-8z-15=0.$$

Уравнение нормали будем искать в виде:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0;z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0;z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0;z_0)},$$

$$\frac{(x-2)}{2}=\frac{(y+3)}{-9}=\frac{(z-2)}{-8}.$$

Задание 5. Даны функция $z=x^2+3y^3-xy$, точка $M_0(1;1)$ и вектор $\vec{s}(-5;12)$.

Найти:

1) $\overrightarrow{grad}\, z(M_0)$;

2) производную функции z по направлению $\vec{s}$.

Решение.

1) Найдём частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 9y^2 - x$.

Найдём значения частных производных в точке $M_0(1;1)$: $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 8$.

Таким образом, $\overrightarrow{grad}\, z(M_0) = (1;8)$ или $\overrightarrow{grad}\, z = \vec{i} + 8\vec{j}$.

2) Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{s}$. $|\vec{s}| = 13$ $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$; $\cos\beta = \frac{12}{13}$.

Следовательно, $\frac{\partial z}{\partial s} = 1 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) + 8 \cdot \frac{12}{13} = 7$.

Максимальное значение производной данной функции в точке $M_0(1;-1)$ равно $\left|\overrightarrow{grad}\, z(M_0)\right| = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{65}$. В то время как значение производной в направлении вектора $\vec{s}$ равно 7.

Дополнительные задачи

1. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^2 + xy + y^2$, где $x = t^2$, $y = t^3$.

   Ответ: $\frac{dz}{dt} = 4t^3 + 5t^4 + 6t^5$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и dz, для неявно заданной функции $z = f(x;y)$, определенной уравнением $z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x = 0$.

   Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{6xy + z - 2}{3z^2 + x + 2y^2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3x^2 + 2yz^2 + 1}{3z^2 + x + 2y^2z}$,

   $$dz = -\frac{(6xy + z - 2)dx + (3x^2 + 2yz^2 + 1)dy}{3z^2 + x + 2y^2z}.$$

3. Найти градиент функции $z = x^2 + 2y^2 - xy$ в точке $M_0(1;-1)$.

   Ответ: $\overrightarrow{grad}\, z = 3\vec{i} - 5\vec{j}$.

4. Найти производную функции $z = \sqrt[3]{xy}$ в точке $M_0(8;-1)$ по направлению вектора $\vec{s}(-1;-1)$.

   Ответ: $\frac{\partial z}{\partial s} = -\frac{7}{12\sqrt{2}}$.

5. Найти градиент функции $u = x^2y^3 + 5z^3 - y^2z$ в точке $M_0(-2;1;3)$.

   Ответ: $\overrightarrow{grad}\, u(M_0) = -4 \cdot \vec{i} + 6 \cdot \vec{j} + 134 \cdot \vec{k}$; $\left|\overrightarrow{grad}\, u(M_0)\right| = \sqrt{18008}$.