Дифференцируемость, полный дифференциал функции нескольких переменных. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Задание 1. Найти полный дифференциал функции:

1) $z = \dfrac{y}{x^2 - y^2}$; 2) $u = x^{y^2 z}$.

<u>Решение.</u>

1) Полный дифференциал функции будем искать по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Так как $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$, то полный дифференциал функции имеет вид

$$dz = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)^2} dx + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2} dy \text{ или } dz = \frac{-2xydx + \left(x^2 + y^2\right)dy}{(x^2 - y^2)^2}.$$

2) Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z\, x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} (\ln x) \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} (\ln x) \cdot y^2.$$

Полный дифференциал функции найдем как сумму частных дифференциалов:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

$$du = y^2 z\, x^{y^2 z - 1} dx + 2yz\, x^{y^2 z} \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz.$$

Задание 2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ в точке $M_0(1;1)$.

<u>Решение</u>. Уравнение касательной плоскости будем искать в виде:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где $\vec{N} = (A; B; C)$ - вектор нормали к поверхности в точке касания, координаты которого равны $A = \dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0)$, $B = \dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0)$, $C = -1$.

Определим координаты нормального вектора $\vec{N}=(A;B;C)$. Для этого найдем значения частных производных в точке $M_0(1;1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y-1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2x+2y+2 \text{; тогда}$$

$$A=\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)=-1, \quad B=\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)=2, \quad C=-1.$$

Следовательно, $\vec{N}=(-1;2;-1)$.

Найдем значение z_0: $z_0=x_0^{\;2}-2x_0y_0+y_0^{\;2}-x_0+2y_0=1$.

Уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$-(x-1)+2(y-1)-(z-1)=0,$$

$$x-2y+z=0.$$

Уравнение нормали имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}; \text{ откуда получаем}$$

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1} \text{ – уравнение нормали.}$$

Задание 3. Дана функция $z=\frac{e^{xy}}{y^3}$. Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Убедиться, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

<u>Решение.</u> Находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{e^{xy}}{y^3}\right)'_x=\frac{ye^{xy}}{y^3}=\frac{e^{xy}}{y^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{e^{xy}}{y^3}\right)'_y=\frac{xy^3e^{xy}-3y^2e^{xy}}{\left(y^3\right)^2}=\frac{xye^{xy}-3e^{xy}}{y^4}.$$

Частные производные второго порядка равны соответственно

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{e^{xy}}{y^2}\right)'_x=\frac{ye^{xy}}{y^2}=\frac{e^{xy}}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(\frac{e^{xy}}{y^2}\right)'_y=\frac{xy^2e^{xy}-2ye^{xy}}{\left(y^2\right)^2}=\frac{(xy-2)e^{xy}}{y^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{xye^{xy}-3e^{xy}}{y^4}\right)'_x=\frac{1}{y^4}\left(ye^{xy}+xy^2e^{xy}-3ye^{xy}\right)=\frac{(xy-2)e^{xy}}{y^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{xye^{xy}-3e^{xy}}{y^4}\right)'_y=\frac{\left(x^2y^2-6xy+12\right)e^{xy}}{y^5}.$$

Отмечаем, что смешанные частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, отличающиеся только порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.

Задание 4. Найти $d^2 z$, если $z = 2x^3 y - \frac{1}{x+y}$.

<u>Решение.</u> Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2x^3 y - \frac{1}{x+y}\right)'_x = 6x^2 y + \frac{1}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2x^3 y - \frac{1}{x+y}\right)'_y = 2x^3 + \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(6x^2 y + \frac{1}{(x+y)^2}\right)'_x = 12xy - \frac{2}{(x+y)^3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y \partial x} = \left(6x^2 y + \frac{1}{(x+y)^2}\right)'_y = 6x^2 - \frac{2}{(x+y)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(2x^3 + \frac{1}{(x+y)^2}\right)'_y = -\frac{2}{(x+y)^3}.$$

Применяя формулу дифференциала второго порядка функции $z = f(x; y)$ двух переменных

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

получаем

$$d^2 z = \left(12xy - \frac{2}{(x+y)^3}\right)dx^2 + 2\left(6x^2 - \frac{2}{(x+y)^3}\right)dxdy - \frac{2}{(x+y)^3} dy^2.$$

Дополнительные задачи

1. Найти полные дифференциалы функций:

1) $z = \cos\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}$; 2) $u = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$.

Ответы: 1) $dz = \frac{1}{(x^3 + y^3)^2} \sin\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} \cdot \left(x\left(x^3 + 3xy^2 - 2y^3\right)dx + y\left(y^3 + 3x^2 y - 2x^3\right)dy\right)$;

2) $du = \frac{dx}{\sqrt{y^2 + z^2}} - \frac{xydy + xzdz}{\sqrt{(y^2 + z^2)^3}}$.

2. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $P_0(1;-2;5)$.

   Ответ: $2x - 4y - z - 5 = 0$, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}$.

3. Найти $d^2 z$, если $z = \sin x \sin y$.

   Ответ: $-\sin x \sin y\, dx^2 + 2\cos x \cos y\, dx\, dy - \sin x \sin y\, dy^2$.