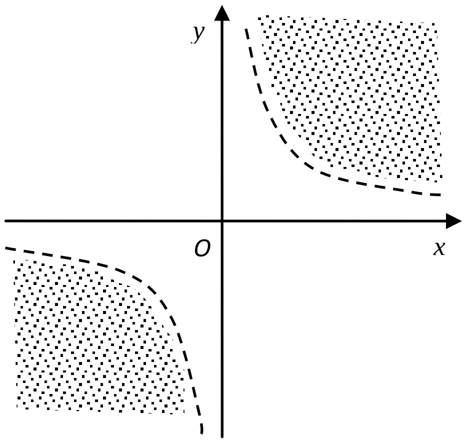
Понятие функции нескольких переменных. Область определения, график функции, линии уровня функции двух переменных. Частные производные

Задание 1. Найти область определения функции $z(x;y)=\ln(xy-1)$.

<u>Решение.</u> Область определения данной функции – это множество точек плоскости *Oxy*, удовлетворяющих неравенству $xy-1>0$. Его решение осуществляется с помощью обобщенного метод интервалов.



Шаг 1. Строим границу области определения.

Она определяется равенством $xy=1 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{x}$

Гиперболу, заданную уравнением $y=\dfrac{1}{x}$,
строим пунктирной линией, поскольку неравенство $xy-1>0$ является строгим.

Шаг 2. Гипербола $y=\dfrac{1}{x}$ разбивает плоскость *Oxy* на три части.

В каждой из них выясняем, выполняется неравенство $xy-1>0$ или нет.

Для этого берем в каждой части произвольную точку и выполняем указанное вычисление.

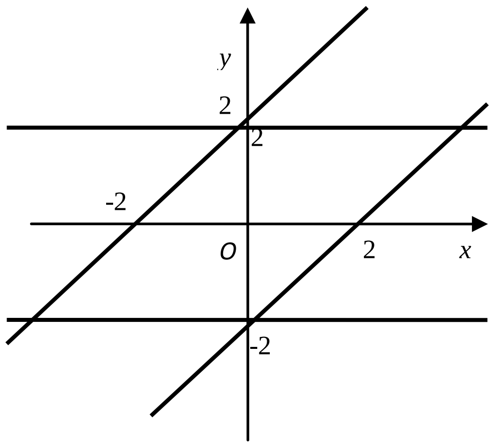
Точки (2, 2) и (-2,-2) удовлетворяют неравенству, поэтому соответствующие им части заштриховываем. Точка (0,0) неравенству не удовлетворяет, поэтому эту часть плоскости не заштриховываем.

Ответом к задаче служит выполненное построение.

Задание 2. Найти область определения функции $f(x;y)=\arccos\dfrac{x-y}{2}+\arcsin\dfrac{y}{2}$.

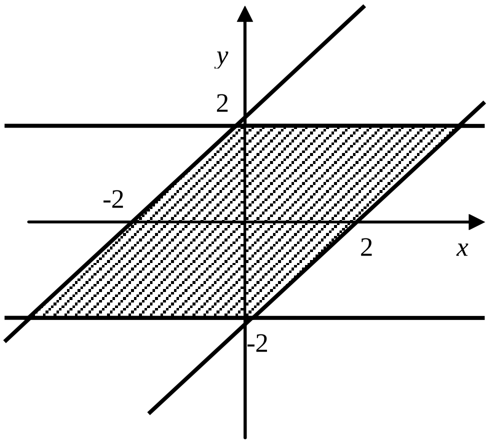
<u>Решение.</u> Область определения данной функции задается системой неравенств:

$$\begin{cases} -1\le\dfrac{x-y}{2}\le 1 \\ -1\le\dfrac{y}{2}\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le x-y\le 2 \\ -2\le y\le 2 \end{cases}.$$



Шаг 1. Строим границы области определения.
Границами служат сплошные линии:
прямые $x-y=-2,\ x-y=2,\ y=-2,\ y=2$.
Они разбивают плоскость на 9 частей.

Шаг 2. В каждой из частей берем точку и проверяем в ней выполнимость условий системы. Например, в точке (0,0) оба неравенства системы выполняются, следовательно, мы заштриховываем ромб, содержащий эту точку. Проверяем что в других частях плоскости выбранные точки не удовлетворяют системе неравенств. Получаем ответ:



Задание 3. Найти частные производные функций:

1) $z=\dfrac{x}{y^3}+\dfrac{y}{x^3}-\dfrac{1}{6x^2y}$;

2) $z=\dfrac{x^2-2xy}{y^2+2xy+1}$.

Решение.

1) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x}{y^3}+\frac{y}{x^3}-\frac{1}{6x^2y}\right)'_x=\frac{1}{y^3}(x)'+y\left(\frac{1}{x^3}\right)'-\frac{1}{6y}\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{1}{y^3}-\frac{3y}{x^4}+\frac{1}{3x^3y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x}{y^3}+\frac{y}{x^3}-\frac{1}{6x^2y}\right)'_y=x\left(\frac{1}{y^3}\right)'+\frac{1}{x^3}y'-\frac{1}{6x^2}\left(\frac{1}{y}\right)'=-\frac{3x}{y^4}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{6x^2y^2}.$$

2) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\left(x^2-2xy\right)'_x\left(y^2+2xy+1\right)-\left(x^2-2xy\right)\left(y^2+2xy+1\right)'_x}{\left(y^2+2xy+1\right)^2}=$$

$$=\frac{(2x-2y)\left(y^2+2xy+1\right)-\left(x^2-2xy\right)2y}{\left(y^2+2xy+1\right)^2}=\frac{2\left(xy^2+x^2y+x-y^3-y\right)}{\left(y^2+2xy+1\right)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\left(x^2-2xy\right)'_y\left(y^2+2xy+1\right)-\left(x^2-2xy\right)\left(y^2+2xy+1\right)'_y}{\left(y^2+2xy+1\right)^2}=$$

$$=\frac{-2x\left(y^2+2xy+1\right)-\left(x^2-2xy\right)(2y+2x)}{\left(y^2+2xy+1\right)^2}=\frac{2x\left(y^2-xy-x^2-1\right)}{\left(y^2+2xy+1\right)^2}.$$

Задание 4. Доказать, что функция $z=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$ удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2.$$

Решение.

Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x^2+xy+y^2}\left(x^2+xy+y^2\right)'_x=\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^2+xy+y^2}\left(x^2+xy+y^2\right)'_y=\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}.$$

Подставляем полученные частные производные в заданное уравнение:

$$x\cdot\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}+y\cdot\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}=2;$$

$$\frac{2x^2+2xy+2y^2}{x^2+xy+y^2}=2;$$

$$2=2.$$

Полученное тождество показывает, что функция $z(x;y)=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$ удовлетворяет данному уравнению.

Задание 5. Найти $\frac{\partial u}{\partial z}$ от функции $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{xz}$.

<u>Решение.</u>

По правилу дифференцирования сложной функции, считая x и y постоянными, получим

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{xz}\right)'_z=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{xz}\right)^2}\left(\frac{y}{xz}\right)'_z=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{xz}\right)^2}\left(-\frac{y}{xz^2}\right)=-\frac{xy}{x^2z^2+y^2}.$$

Дополнительные задачи

1. Найти область определения функций:

   1) $z=x+\arccos y$; 2) $f(x,y)=\sqrt{\frac{2x+y-4}{x^2-y^2}}$.

2. Найти частные производные функций:

   1) $z=e^{x^2+y^2}$; 2) $u=x^3+yz^2+3xy-x+z$; 3) $u=x^{y^z}$.

   Ответы: 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^{x^2+y^2}$;

   2) $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+3y-1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=z^2+3x$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2yz+1$;

   3) $\frac{\partial u}{\partial x}=y^zx^{y^z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x$. $\frac{\partial u}{\partial z}=y^zx^{y^z}\ln x\cdot\ln y$.