Интегрирование рациональных дробей, тригонометрических и иррациональных функций

Задание 1. Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^2+4x+6}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}$;

3) $\int \frac{3x-1}{x^2+4x+6}dx$; 4) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx$.

Решение. Интегралы (1) и (2) содержат квадратные трехчлены в знаменателе и легко приводятся к табличным выделением полного квадрата:

1) $x^2+4x+6=(x^2+2\cdot x\cdot 2+(2)^2)-4+6=(x+2)^2+2$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+6}=\int \frac{dx}{(x+2)^2+(\sqrt{2})^2}=\left| \begin{array}{c} \int \frac{dx}{x^2+a^2}= \\ =\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c \end{array} \right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{2}}+c$$

2)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}=\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2}}=\left| \begin{array}{c} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}= \\ =\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c \end{array} \right|=\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right|+c$$

В интегралах (3) и (4) необходимы дополнительные тождественные преобразования. В числителе нужно выделить производную квадратного трехчлена:

$(x^2+4x+6)'=2x+4$ $d(x^2+4x+6)=(2x+4)dx$

3) $$\frac{3x-1}{x^2+4x+6}=\frac{\frac{3}{2}(2x+4)-6-1}{x^2+4x+6}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2x+4}{x^2+4x+6}-\frac{7}{x^2+4x+6}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{(x^2+4x+6)'}{x^2+4x+6}-\frac{7}{(x+2)^2+2}$$

$$\int \frac{3x-1}{x^2+4x+6}dx=\frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+4x+6)}{x^2+4x+6}-7\int \frac{dx}{(x+2)^2+2}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+6\right|-$$

$-\frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{2}}+c$

4) $\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4x+6}}=\frac{\frac{3}{2}(2x+4)-6-1}{\sqrt{x^2+4x+6}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+6}}-\frac{7}{\sqrt{x^2+4x+6}}$

$$\int\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4x+6}}dx=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+4x+6)}{\sqrt{x^2+4x+6}}-\int\frac{7}{\sqrt{(x+2)^2+2}}=$$

$$\frac{3}{2}\frac{(x^2+4x+6)^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}}-7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right|+c$$

Задание 2. Найти интеграл $\int\frac{x^5+2x^3-x^2+x+3}{x^3+x-2}\,dx$.

<u>Решение</u>. Дробь, стоящая под интегралом - неправильная, поэтому из нее надо выделить целую часть. Делим числитель на знаменатель уголком:

$$\begin{array}{l|l} x^5+2x^3-x^2+x+3 & x^3+x-2 \\ \cline{2-2} \underline{x^5+x^3-2x^2} & x^2+1 \\ \quad x^3+x^2+x+3 & \\ \quad \underline{x^3+x-2} & \\ \qquad x^2+5 & \end{array}$$

$$\frac{x^5+2x^3-x^2+x+3}{x^3+x-2}=x^2+1+\frac{x^2+5}{x^3+x-2},$$

$$\int\frac{x^5+2x^3-x^2+x+3}{x^3+x-2}dx=\int(x^2+1)dx+\int\frac{x^2+5}{x^3+x-2}\,dx=\frac{x^3}{3}+x+\int\frac{x^2+5}{x^3+x-2}\,dx.$$

В последнем получившемся интеграле правильную дробь раскладываем на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами по известному алгоритму:

$$\frac{x^2+5}{x^3+x-2}=\frac{x^2+5}{(x-1)(x^2+x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+2}=\frac{A(x^2+x+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+2)},$$

$$\frac{x^2+5}{x^3+x-2}=\frac{A(x^2+x+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+2)}.$$

Дроби равны. Знаменатели равны. Следовательно, равны числители:

$x^2+5=A(x^2+x+2)+(Bx+C)(x-1)$.

Для отыскания числовых коэффициентов используем два подхода.

1 подход. Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях.

2 подход. Два многочлена равны тогда и только тогда, когда значения этих многочленов равны при любом значении переменной x.

В этом примере воспользуемся первым способом.

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях: $\begin{array}{r|l} x^2 & 1=A+B \\ x & 0=A+C-B \\ x^0 & 5=2A-C \end{array}$.

Полученная система легко решается, окончательно получаем:

$$A=\frac{3}{2} \quad B=-\frac{1}{2} \quad C=-2.$$

Осталось найти интеграл от суммы простейших дробей:

$$\int\frac{x^2+5}{x^3+x-2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{-\frac{1}{2}x-2}{x^2+x+2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x+4}{x^2+x+2}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int\frac{x+4}{x^2+x+2}dx$$

В последнем интеграле (как в задании 1) выделяем полный квадрат в знаменателе и преобразуем числитель:

$$\int\frac{x+4}{x^2+x+2}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{7}{2}}{x^2+x+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+2}dx+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+2|+\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+2|+\sqrt{7}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}.$$

В итоге получаем:

$$\int\frac{x^5+2x^3-x^2+x+3}{x^3+x-2}dx=\frac{x^3}{3}+x+\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x^2+x+2|-\frac{\sqrt{7}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+c.$$

Задание 3. Найти интеграл $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+4}dx$.

Решение. В подынтегральной функции находится синус в числителе в нечетной степени. Одну степень можно занести под дифференциал, оставшаяся четная степень легко выражается через косинус:

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+4}=\frac{\sin^2 x\cdot\sin x}{\cos^2 x+4}=\frac{(1-\cos^2 x)\cdot\sin x}{\cos^2 x+4}.$$

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+4}dx=\int\frac{(1-\cos^2 x)\cdot\sin x}{\cos^2 x+4}dx=\left|\begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx\end{array}\right|=-\int\frac{(1-t^2)dt}{t^2+4}=$$

$$=\int\frac{t^2-1}{t^2+4}dt=\int\frac{(t^2+4)-5}{t^2+4}dt=\int dt-5\int\frac{dt}{t^2+4}=t-5\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{t}}{2}+c=$$

$$=\cos x-\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{2}+c.$$

Дополнительные задачи

1. Найти интегралы:

а) $\int\frac{5x+3}{x^2-6x+13}dx$

(Отв. $\frac{5}{2}\ln\left|x^2-6x+13\right|+9\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+c$);

б) $\int\frac{dx}{x^3-5x^2+8x-4}$ (Отв. $\ln|x-1|-\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}+c$).

2. Найти интегралы:

а) $\int\sin 2x\sin 7x\,dx$

(Отв. $\frac{1}{10}\sin 5x-\frac{1}{18}\sin 9x+c$);

б) $\int\cos^2 5x\,dx$ (Отв. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}\sin 10x+c$).

3. Найти интеграл $\int\frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+9)\sqrt{x}}$

(Отв. $6\cdot\sqrt[6]{x}-18\cdot\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{3}+c$).