Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям

Задание 1. Найти интегралы:

1) $\int e^{5x+2}dx$;   2) $\int (4x-1)^{18}dx$;   3) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$.

<u>Решение.</u> Данные интегралы «почти табличные». Используем свойство инвариантности дифференциала первого порядка и линейные свойства дифференциала:

$dx = d(x \pm a)$
$dx = \frac{d(a\cdot x)}{a}$

Рассмотрим вариант внесения линейной функции под дифференциал без замены переменной:

$$1)\ \int \cos(5x+3)dx = \int \cos(5x+3)\frac{d(5x+3)}{5} = = \frac{1}{5}\sin(5x+3)+c$$

(табличный интеграл $\int \cos t\, dt = \sin t + c$).

$$2)\ \int (4x-1)^{18}dx = \int (4x-1)^{18}\frac{d(4x-1)}{4} = \frac{(4x-1)^{19}}{76}+c$$

(табличный интеграл $\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}+c$).

$$3)\ \int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{3^2-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+c$$

(табличный интеграл $\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \arcsin\left(\frac{t}{a}\right)+c$).

Задание 2. Найти интеграл $\int x^2\sin(x^3+2)dx$

<u>Решение.</u> Подынтегральное выражение является сложной функцией. Но в произведении функций x^2 и $\sin(x^3+2)$ легко увидеть «частичную связь» через производную

$$(x^3+2)' = 3x^2.$$

Следовательно, можно внести функцию под знак дифференциала. Введем замену переменных.

$$\int x^2\sin(x^3+2)dx=\left|\begin{array}{l} t=x^3+2 \\ dt=3x^2dx \\ \dfrac{dt}{3}=x^2dx \end{array}\right|=\int\sin t\,\frac{dt}{3}=\frac{-1}{3}\cos t+c=\frac{-1}{3}\cos(x^3+2)+c\,.$$

Задание 3. Найти интеграл $\int x^2\sin x dx$

Решение. В данном интеграле необходимо применить формулу интегрирования по частям:

$$\int udv=uv-\int vdu$$

За u принимается функция, которая в ходе дифференцирования упрощается. За dv принимается та часть подынтегрального выражения, в котором множителем является функция, интеграл которой известен или может быть вычислен.

Под интегралом **степенная функция** умножается на **тригонометрическую**. За переменную u берут степенную функцию, за dv – оставшуюся часть подынтегрального выражения. Формулу интегрирования по частям применим два раза.

$$\int x^2\sin x dx=\left[\begin{array}{c|c} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\sin xdx & v=\int\sin xdx=-\cos x \end{array}\right]=-x^2\cos x-\int 2x(-\cos x)dx=$$

$$=-x^2\cos x+2\int x\cos x dx=\left[\begin{array}{c|c} u=x & du=dx \\ dv=\cos xdx & v=\int\cos xdx=\sin x \end{array}\right]=$$

Задание 4. Найти интеграл $\int x\cdot\operatorname{arctg} x dx$

Решение. В данном интеграле снова применим формулу интегрирования по частям. Под интегралом **степенная функция** умножается на **обратную тригонометрическую функцию**. За переменную u в данном случае необходимо взять обратную тригонометрическую функцию.

$$\int x\operatorname{arctg} x dx=\left[\begin{array}{c|c} u=\operatorname{arctg} x & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx & v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right]=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x+c$$

Задание 5. Найти интеграл $\int e^x \cos x dx$.

Решение. Данный интеграл относится к так называемым «циклическим (возвратным) интегралам». Обозначим исходный интеграл $J = \int e^x \cos x dx$.Здесь совершенно неважно, что взять в качестве u и dv в первом применении формулы, но повторно при выборе следует действовать, не меняя стратегии.

$$J = \int e^x \cos x dx = \left\lfloor \begin{array}{c|c} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right\rfloor = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx =$$

$$= \left\lceil \begin{array}{c|c} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right\rceil = e^x \sin x - (-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx) =$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - J$$

После двукратного применения формулы интегрирования по частям получается алгебраическое уравнение по переменной J:

$$J = e^x \sin x + e^x \cos x - J \qquad 2J = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$J = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x + e^x \cos x \right)$$

Ответ: $J = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x + e^x \cos x \right) + c$.

Дополнительные задачи

1. Найти интегралы:

1) $\int \sqrt{3x+8}\, dx$; 2) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 4}} dx$; 3) $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 7} dx$

(Отв. $\frac{1}{3}(3x+8)^{\frac{3}{2}} + c$; $-\ln\left|\cos x + \sqrt{\cos^2 x + 4}\right| + c$; $\frac{1}{4\sqrt{7}} \ln\left|\frac{e^{2x} - \sqrt{7}}{e^{2x} + \sqrt{7}}\right| + c$).

2. Найти интегралы:

1) $\int x^2 e^{3x} dx$ (Отв. $\frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c$);

2) $\int x^2 \ln x\, dx$ (Отв. $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c$);

3) $\int \arccos\frac{x}{4} dx$ (Отв. $x\arccos\frac{x}{4} - \sqrt{16 - x^2} + c$).