Понятие первообразной. Неопределённый интеграл. Таблица неопределённых интегралов. Свойства неопределённого интеграла

Задание 1.

Проверить, что функция $F(x)=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$ является первообразной функции $f(x)=\frac{1}{a^2-x^2}$.

Решение. Функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, если выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

Равенство проверяется непосредственно дифференцированием:

$$F'(x)=\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right)'=\frac{1}{2a}\left(\ln|a+x|-\ln|a-x|\right)'=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}\frac{a-x+a+x}{a^2-x^2}=\frac{1}{a^2-x^2}=f(x)$$ - получили подынтегральную функцию.

Замечание. При дифференцировании функций, содержащих знак модуля, рассмотрите два случая, когда выражение под знаком модуля положительно и отрицательно

Задание 2.

Используя таблицу, найти интегралы:

1) $\int 5^x dx$; 2) $\int \frac{dx}{8+x^2}$ 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$

Решение.

1) Воспользуемся табличным интегралом $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$.

$a=5$, $\int 5^x dx=\frac{5^x}{\ln 5}+c$.

2) Воспользуемся табличным интегралом $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+c$.

$a=\sqrt{8}$, $\int\frac{dx}{8+x^2}=\frac{1}{\sqrt{8}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{8}}+c$.

3) Воспользуемся табличным интегралом $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c$.

$a=\sqrt{8}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{8}} + c$.

Задание 3.

Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[5]{x^3} - 4x\sin x + 2}{x}$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение. Используя свойство линейности неопределенного интеграла, получаем:

$$\int \frac{\sqrt[5]{x^3} - 4x\sin x + 2}{x}dx = \int\left(\frac{\sqrt[5]{x^3}}{x} - 4\cdot\frac{x\sin x}{x} + \frac{2}{x}\right)dx = \int\left(x^{\frac{-2}{5}} - 4\sin x + \frac{2}{x}\right)dx =$$

$$= \int x^{\frac{-2}{5}}dx - 4\int \sin x dx + 2\int\frac{dx}{x} = \frac{x^{\frac{-2}{5}+1}}{\frac{-2}{5}+1} - 4(-\cos x) + 2\ln|x| + c =$$

$$= \frac{5x^{\frac{3}{5}}}{3} + 4\cos x + 2\ln|x| + c$$

Задание 4.

Найти интеграл $\int \frac{2x^2}{x^2-5}dx$.

Решение. Преобразуя подынтегральное выражение в сумму и используя свойство линейности неопределенного интеграла, получим:

$$\int \frac{2x^2}{x^2-5}dx = 2\int\frac{(x^2-5)+5}{x^2-5}dx = 2\int dx + 10\int\frac{dx}{x^2-(\sqrt{5})^2} = 2x + \frac{10}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + c =$$

$$= 2x + \sqrt{5}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + c.$$

Задание 5.

Найти интеграл $\int \frac{(3-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$.

Решение. Выполним тождественные преобразования и далее по свойству линейности неопределенного интеграла получаем:

$$\int\frac{(3-x)^2}{x\sqrt{x}}dx=\int\frac{9-6x+x^2}{x^{\frac{3}{2}}}dx=\int\left(\frac{9}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{6x}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right)dx=9\int x^{-\frac{3}{2}}dx-6\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=9\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}-6\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=-\frac{18}{\sqrt{x}}-12\sqrt{x}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c.$$

Дополнительные задачи

1. Проверить, что функция $F(x)=\arcsin\frac{x}{a}$ является первообразной функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

2. Используя таблицу, найти интегралы:

1) $\int\left(\frac{2}{7}\right)^x dx$; (Отв. $\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^x}{\ln\frac{2}{7}}+c$);

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ (Отв. $\arcsin\frac{x}{3}+c$);

3) $\int\frac{dx}{x^2+3}$ (Отв. $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+c$).

3. Найти интегралы:

1) $\int(x^2-1)(x-4)dx$ (Отв. $\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-4\frac{x^3}{3}+4x+c$);

2) $\int\frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}{x^2}dx$ (Отв. $-\frac{1}{x}-\frac{9}{2}x^{\frac{-2}{3}}-9x^{\frac{-1}{3}}+\ln|x|+c$);

3) $\int\frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^2}}dx$ (Отв. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}-\ln\left|x+\sqrt{5+x^2}\right|+c$).