Асимптоты графика функции.

Общая схема исследования функции

(Часть 2)

Задание. Исследовать функции и построить их графики:

1) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$;   2) $y = x^x$.

Решение.

Исследование функций $f(x)$ будем осуществлять в соответствии с рассмотренной ранее общей схемой:

1. Найти область определения $D(f)$.
2. Найти нули функции и интервалы знакопостоянства.
3. Исследовать функцию на периодичность, четность-нечетность.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Исследовать функцию на монотонность и экстремум.
6. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции.
7. Построить график (с учетом уточняющих вычислений).

1) Руководствуясь данной схемой, для $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$ находим:

1. Область определения функции $D(f)=\mathbb{R}$.
2. $f(x) = 0$, т. е. $x - \sqrt[3]{x^2} = 0$. Получаем $x = 0$ и $x = 1$ - нули функции;
   $f(x) > 0$ при $x \in (1;+\infty)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$.
3. Функция общего вида, непериодическая.
4. Вертикальных асимптот нет. Найдем наклонную асимптоту (если она существует):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x} = 1,\ k = 1;\quad \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^2} - x\right) = -\infty$$

(аналогичные результаты получаем при $x \to -\infty$). Так как не существует конечного предела $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right)$, то наклонных асимптот нет.

5. Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции, исследуя первую производную:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Находим критические точки: $x_1 = \frac{8}{27}$ ($f'(x_1) = 0$), $x_2 = 0$ ($f'(x_2) = \infty$). Эти точки разбивают область определения на три интервала $(-\infty; 0)$, $\left(0; \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{8}{27}; +\infty\right)$.

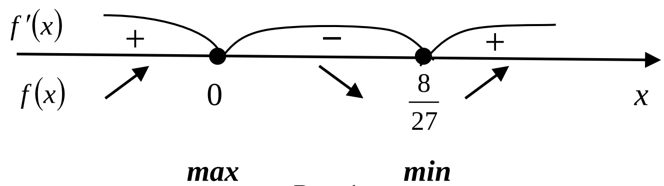

Рис.1

Исследуем функцию на указанных интервалах. Так как при $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{8}{27}; +\infty\right)$ $f'(x) > 0$, то функция строго возрастает на $(-\infty; 0)$ и $\left(\frac{8}{27}; +\infty\right)$. При $x \in \left(0; \frac{8}{27}\right)$ $f'(x) < 0$, следовательно, на этом интервале функция строго убывает. На основании достаточного условия существования экстремума функции делаем вывод:

$x_1 = \frac{8}{27}$ – точка минимума, $f_{\min}\left(\frac{8}{27}\right) = -\frac{4}{27}$;

$x_2 = 0$ – точка максимума, $f_{\max}(0) = 0$.

6. .Найдём интервалы выпуклости и точки перегиба функции.

$$f''(x) = \frac{2}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

$x = 0$ – критическая точка 2-ого рода ($f''(0) = \infty$). Но, так как $\forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $f''(x) > 0$, то график функции не имеет точек перегиба.

7. Перейдем к построению графика. Заметим, что $f'(0) = \infty$, следовательно, ось OY является касательной для графика функции в точке (0,0).

Учитывая полученную информацию, строим график функции:

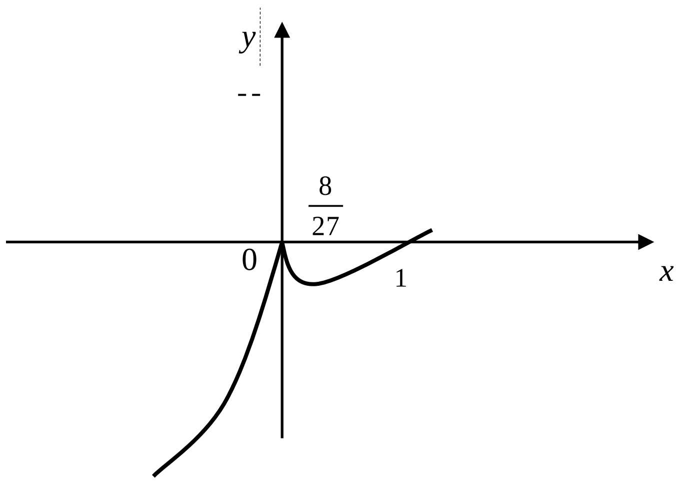

Рис.2

2) Исследуем степенно-показательную функцию: $y = x^x$.

1. Область определения $D(f) = (0; +\infty)$.

Для дальнейшего исследования преобразуем функцию к виду $y = e^{x \ln x}$.

2. Функция общего вида, непериодическая.
3. Функция не имеет нулей.
4. Асимптоты. Исследуем поведение функции на границах области определения:

$\lim\limits_{x \to 0+} e^{x \ln x} = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln x} = +\infty$. Это означает, что у функции нет ни вертикальной, ни горизонтальной асимптоты. Исследуем функцию на наличие наклонной асимптоты: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln x}}{x}=+\infty$, следовательно, наклонной асимптоты нет.

5. Исследуем функцию на монотонность и экстремум с помощью первой производной:

$$y'=x^x(\ln x+1)$$

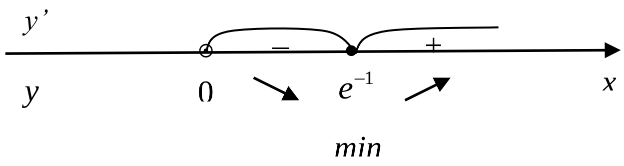

Рис. 3

$y'=0$ при $x=e^{-1}\approx 0{,}367$ – точка минимума, $y_{\min}\left(e^{-1}\right)\approx 0{,}692$.

6. Найдем вторую производную: $y''=x^x\left((\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right)$.

$y''>0$ на $(0;+\infty)$ – функция выпукла вниз.

7. Уточним поведение функции вблизи точки $x=0$, вычислив

$$\lim_{x\to 0+}y'=\lim_{x\to 0+}\left(x^x(\ln x+1)\right)=-\infty \; .$$

Из чего следует, что график функции $y=x^x$ касается оси Oy в точке $(0;1)$.

График функции $y=x^x$ изображен на рис. 4.

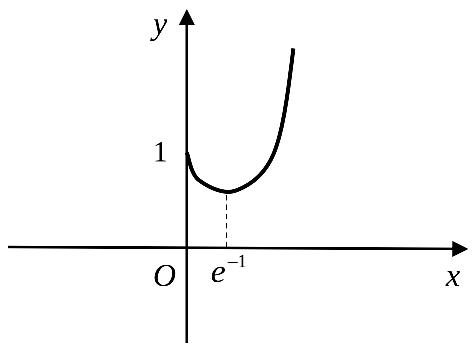

Рис. 4

Дополнительные задачи

Задание. Исследовать функции и построить их графики:

1) $y=\frac{x^2}{x-2}$; 2) $y=2\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^2}+1$; 3) $y=x\sqrt{1-x^2}$; 4) $y=\frac{x^3}{4-x^2}$.