Теоретический материал (часть 2)
Общая схема исследования функции

Исследование функции $f(x)$ при построении её графика целесообразно осуществлять в следующей последовательности действий:

1. Найти область определения $D(f)$.
2. Найти нули функции и интервалы знакопостоянства.
3. Исследовать функцию на периодичность, четность (нечетность).
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции.
6. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Пример. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{x^3}{4-x^2}$ и построить её график.

Решение.

1. Область определения функции $D(f)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.
2. Найдем нули функции: $f(x)=0$, т.е. $\dfrac{x^3}{4-x^2}=0$, следовательно, $x=0$.

   Точка (0, 0) – единственная точка пересечения графика $f(x)$ с осями координат.
   $f(x)>0$ при $\forall x\in(-\infty;-2)\cup(0;2)$ и $f(x)<0$ при $\forall x\in(-2;0)\cup(2;+\infty)$.
3. Функция $f(x)=\dfrac{x^3}{4-x^2}$ – непериодическая.

   $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{4-(-x)^2}=-\dfrac{x^3}{4-x^2}=-f(x)$, следовательно, $f(x)$ – нечетная.
4. Исследуем поведение функции в окрестности точек разрыва графика функции:

$\lim\limits_{x\to-2-0}\dfrac{x^3}{4-x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-2+0}\dfrac{x^3}{4-x^2}=-\infty$, следовательно $x=-2$ − вертикальная асимптота;

$\lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{x^3}{4-x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{x^3}{4-x^2}=-\infty$, следовательно $x=2$ − вертикальная асимптота.

Исследуем функцию на существование наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{4-x^2}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4-x^2}=-1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{4-x^2}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{4-x^2}\right)=0.$$

Таким образом, прямая $y=-x-$ наклонная асимптота графика функции при $x\to+\infty$. Рассуждая аналогичным образом, получим, что при $x\to-\infty$ прямая $y=-x$ также является наклонной асимптотой данного графика функции.

5. Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции, применяя первую производную:

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{4-x^2}\right)'=\frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2}=\frac{x^2(2\sqrt{3}-x)(2\sqrt{3}+x)}{(4-x^2)^2}$$

Находим критические точки 1-ого рода: $f'(x)=0$ при $x_1=-2\sqrt{3}$, $x_2=0$ и $x_3=2\sqrt{3}$; $f'(x)$ не существует при $x_4=-2$ и $x_5=2$, но т.к. в этих точках $f(x)$ не определена, то, как возможные точки экстремума, их рассматривать не будем.

Так как $f'(x)>0$ при $x\in\left(-2\sqrt{3};-2\right)\cup(-2;0)\cup(0;2)\cup\left(2;2\sqrt{3}\right)$, то $f(x)$ строго возрастает на $\left(-2\sqrt{3};-2\right), (-2;0), (0;2)$ и $\left(2;2\sqrt{3}\right)$. При $x\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$ $f'(x)<0$, следовательно, на интервалах $(-\infty;\,0)$ и $(3;+\infty)$ функция строго убывает (Рис.1).

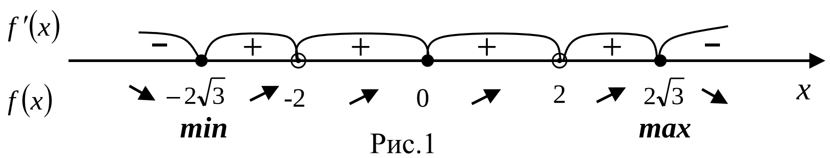

Рис.1

На основании 1-ого достаточного признака существования экстремума функции делаем вывод: функция имеет минимум в точке $x=-2\sqrt{3}$, $f_{\min}\left(-2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$; в точке $x=2\sqrt{3}$ – максимум, $f_{\max}\left(2\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}$.

6. Найдём интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

$$f''(x)=\frac{8x\left(12+x^2\right)}{\left(4-x^2\right)^3}.$$

Находим критические точки 2-ого рода: $f''(x)=0$ при $x_1=0$; $f''(x)$ не существует при $x_{2,3}=\pm 2$, но т.к. в этих точках $f(x)$ не определена, то, как возможные точки перегиба, их рассматривать не будем.

Так как $f''(x)>0$ при $x\in(-\infty;-2)\cup(0;2)$, то график $f(x)$ на $(-\infty;-2)$ и $(0;2)$ является выпуклым вниз. При $x\in(-2;0)\cup(2;+\infty)$ $f'(x)<0$, следовательно, на интервалах $(-2;0)$ и $(2;+\infty)$ кривая выпукла вверх (Рис.2).

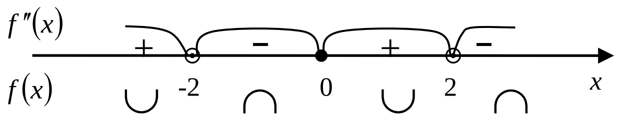

Рис.2

На основании 1-ого достаточного признака существования точки перегиба делаем вывод: $x\ = 0$ – точка перегиба, $O(0,\,0)$ – точка перегиба графика функции.

Учитывая полученную информацию, строим график функции:

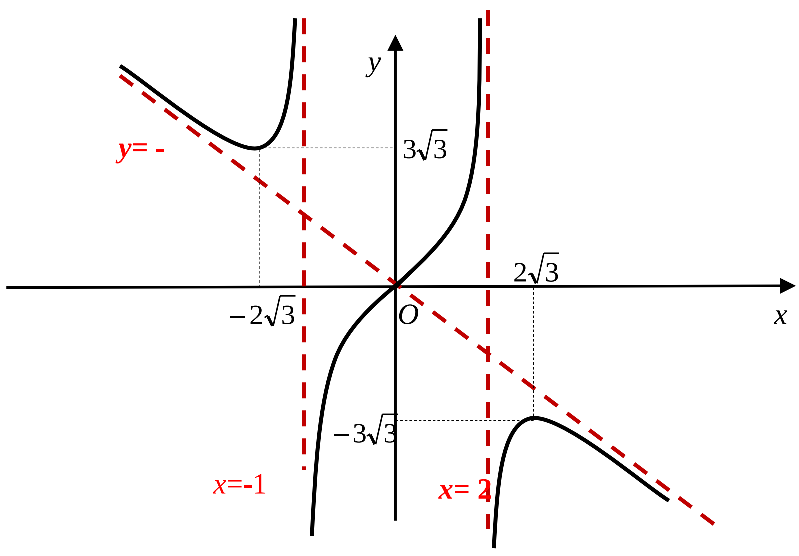

Рис.3