Асимптоты графика функции.

Общая схема исследования функции

(Часть 1)

Задание. Найти асимптоты графиков функций:

1) $f(x)=\dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}}$; 2) $f(x)=x\,\mathrm{arcctg}\,x$.

Решение.

1) Область определения функции $D(f)=(0;+\infty)$.

Исследуем поведение функции на границе области определения:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}=-\infty\ \left(\lim_{x\to 0+}3\ln x=-\infty,\ \lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty\right),$$

следовательно, $x=0$ – вертикальная асимптота.

Исследуем поведение функции при $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}3\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=3\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=3\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0,$$

следовательно, $y=0$ – горизонтальная асимптота графика функции.

Проверим, есть ли у графика функции наклонная асимптота.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{x\sqrt{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}3\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(x\sqrt{x}\right)'}=3\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x\sqrt{x}}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}=0,$$

следовательно, имеем частный случай наклонной асимптоты – горизонтальную асимптоту $y=0$.

Таким образом, функция $f(x)=\dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}}$ имеет две асимптоты: $x=0$ – вертикальная асимптота и $y=0$ – горизонтальная асимптота.

2) График $f(x)=x\,\mathrm{arcctg}\,x$ не имеет вертикальных асимптот, так как функция непрерывна на всей числовой оси.

Проведем исследование на наличие у графика функции наклонных асимптот:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\,\mathrm{arcctg}\,x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{arcctg}\,x=0;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}x\operatorname{arcctg}x\overset{(\infty\cdot 0)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arcctg}x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1.$$

Следовательно, при $x\to+\infty$ кривая имеет асимптоту $y=1$ – это частный случай наклонной асимптоты – горизонтальная асимптота.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\operatorname{arcctg}x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}x=\pi;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x\operatorname{arcctg}x-\pi x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(\operatorname{arcctg}x-\pi\right)\overset{(\infty\cdot 0)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arcctg}x-\pi}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2x}=1.$$

Следовательно, при $x\to-\infty$ имеем асимптоту $y=\pi x+1$.

Таким образом, функция $f(x)=x\operatorname{arcctg}x$ имеет две асимптоты: $y=1$ – горизонтальная асимптота и $y=\pi x+1$ – наклонная асимптота.

Дополнительные задачи

1. Найти асимптоты графика функции $f(x)$:

   1) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-9}$;

   2) $f(x)=x\cdot e^x$;

   3) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}$.

Ответы:

1) Прямые $x=-3$ и $x=3$ – вертикальные асимптоты, $y=1$ – горизонтальная асимптота;
2) Прямая $y=0$ – горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$;
3) Прямая $x=-1$ – вертикальные асимптоты, $y=x+2$ – наклонная асимптота.