Применение производной к исследованию функции на монотонность. Экстремум функции. Выпуклость функции, точки перегиба

Задание 1. Определить интервалы монотонности функций:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$; 2) $f(x)=\ln(1-x^2)$.

Решение.

1) Функция $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$ определена и дифференцируема на всей числовой оси, кроме точки $x=1$. Область определения $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Найдем интервалы монотонности функции, исследуя первую производную:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+1}{(x-1)^2}\right)'=-\frac{2(x+1)}{(x-1)^3}.$$

Так как $f'(x)>0$ при $x\in(-1;1)$, то функция строго возрастает на этом интервале.

При $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ $f'(x)<0$, следовательно, на $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ функция строго убывает.

Таким образом, функция $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$ строго убывает на $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$ и строго возрастает на $(-1;1)$.

2) функции $f(x)=\ln(1-x^2)$ определена и непрерывна на $(-1;1)$:

$$D(f)=(-1;1)$$

Исследуем знак первой производной на данном интервале:

$$f'(x)=-\frac{2x}{1-x^2}.$$

Так как $f'(x)>0$ при $x\in(-1;0)$ и $f'(x)<0$ при $x\in(0;1)$, то функция строго возрастает на интервале $(-1;0)$ и строго убывает на $(0;1)$.

Задание 2. Исследовать на монотонность и экстремум функции:

1) $f(x)=x^3e^{-x}$; 2) $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$.

Решение.

1) Функция определена и дифференцируема на всей числовой оси: $D(f)=\mathbb{R}$.

Найдем критические точки:

$$f'(x)=\left(x^3e^{-x}\right)'=x^2e^{-x}(3-x),$$

$f'(x)=0$ при $x_1=0$ и $x_2=3$. Эти точки разбивают область определения функции на три интервала $(-\infty;0)$, $(0;3)$, $(3;+\infty)$. Исследуем знак $f'(x)$ на указанных интервалах.

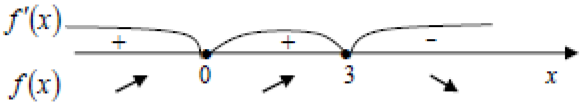

Рис. 1

Так как $f'(x)>0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(0;3)$ и непрерывна в точке $x_1=0$, то функция строго возрастает на $(-\infty;3)$. При $x\in(3;+\infty)$ $f'(x)<0$, следовательно, на этом интервале функция строго убывает (рис.1).

На основании достаточного условия существования экстремума функции делаем вывод: $x_1=0$ не является точкой экстремума;

$x_2=3$ − точка экстремума (max), $f_{\max}(3)=27e^{-3}$.

2) Область определения функции $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$:

$$D(f)=[-1;1].$$

Производная функции $f'(x)=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ обращается в нуль в точках $x_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, в бесконечность в точках $x_{3,4}=\pm1$. Однако, критическими точками являются только x_1 и x_2 (они лежат внутри области определения функции). Точки x_3 и x_4 не являются критическими, так как они являются граничными точками области определения данной функции.

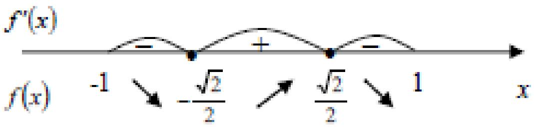

Рис. 2

Так как $f'(x)<0$ при $x\in\left(-1;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right)$ и в точках $x_3=-1$, $x_4=1$ f определена и непрерывна, то на $\left[-1;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right]$ рассматриваемая функция строго убывает, При $x\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ знак производной $f'(x)>0$, следовательно, функция строго возрастает на $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (рис.2).

Таким образом, $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ имеет две точки экстремума:

$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ – точка минимума, $f_{\min}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$;

$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ – точка максимума, $f_{\max}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Задача 3. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Решение. Функция определена и дважды дифференцируема на всей числовой оси.

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = -\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2},$$

$$f''(x) = \left(-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)' = \frac{6x^2-2}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Найдем критические точки второго рода: $f''(x) = 0$ при $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

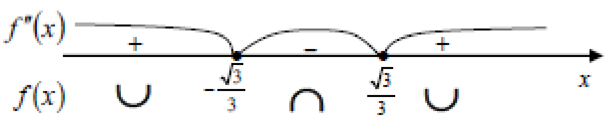

Рис. 3

Так как $f''(x) > 0$ при $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$, то график $f(x)$ на $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$ является выпуклым вниз. При $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $f'(x) < 0$, следовательно, на этом интервале кривая выпукла вверх (рис.3).

На основании 1-ого достаточного признака существования точки перегиба делаем вывод: точки $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ – точки перегиба функции $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Дополнительные задачи

1. Определить интервалы монотонности функции:

   1) $f(x)=(x-2)^2\cdot(x+2)$; 2) $f(x)=\ln\sqrt{1+x^2}$; 3) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

Ответы: 1) строго возрастает на $\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)$ и на $(2;+\infty)$, строго убывает на $\left(-\dfrac{2}{3};2\right)$;

2) строго убывает на $(-\infty;0)$, строго возрастает на $(0;+\infty)$;

3) строго убывает на $(-\infty;0)$ и $(0;1)$, строго возрастает на $(1;+\infty)$.

2. Определить точки экстремума функции:

   1) $f(x)=2x^3-3x^2+1$; 2) $f(x)=\ln\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arctg}x$; 3) $f(x)=\dfrac{e^x}{(x+3)^2}$;

Ответы: 1) $f_{\max}(0)=1$, $f_{\min}(1)=0$; 2) $f_{\min}(-1)=\ln\sqrt{2}-\dfrac{\pi}{4}$; 3) $f_{\min}(-1)=\dfrac{1}{4e}$.

3. Определить интервалы выпуклости и точки перегиба функций:

   1) $f(x)=\dfrac{x^3}{4-x^2}$; 2) $f(x)=x^4-4x^3-48x^2+6x-9$; 3) $f(x)=xe^{2x}+1$.

Ответы: 1) на $(-2;0)$ и $(2;+\infty)$ – выпуклость вверх, на $(-\infty;-2)$ и $(0;2)$ – выпуклость вниз, $x=0$ – точка перегиба;

2) на $(-2;4)$ – выпуклость вверх, на $(-\infty;-2)$ и $(4;+\infty)$ – выпуклость вниз, $x_1=-2$ и $x_2=4$ точки перегиба;

3) на $(-\infty;-1)$ – выпуклость вверх, на $(-1;+\infty)$ – выпуклость вниз, $x=-1$ – точка перегиба.