Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя

Задание 1. Записать формулу Коши для $f(x)=2x^3+5x+1$ и $g(x)=x^2+4$ на отрезке $[0;2]$. Найти c.

Решение. Отметим, что для функций f и g на отрезке $[0;2]$ выполнены все условия теоремы Коши. Тогда, применяя формулу Коши $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, получаем:

$$\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{27-1}{8-4}=\frac{6c^2+5}{2c}\Rightarrow 6c^2-13c+5=0\Rightarrow c_1=\frac{1}{2}; \quad c_1=\frac{5}{3}.$$

Задание 2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln\sin 3x}{\ln x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\operatorname{tg}x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Решение.

1) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1+\ln x\right)'}{\left(e^x-e\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e};$$

2) $$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\sin 3x}{\ln x}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln\sin 3x)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\cos 3x\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)}=1;$$

3) $$\lim_{x\to 0+} x\ln x\overset{[0\cdot\infty]}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=-\lim_{x\to 0+}x=0;$$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)\overset{[\infty-\infty]}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)'}{\left(\ln x+1-\dfrac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Для раскрытия неопределенностей 0^0, ∞^0, 1^∞, которые возникают при вычислении пределов от степенно-показательных функций, т. е. функций вида $f(x)=\varphi(x)^{g(x)}$ (примеры 5-7), применим метод логарифмирования:

5) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\mathrm{tg}x}$

Решение. Обозначим $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\mathrm{tg}x}\overset{(0^0)}{=}A$. Тогда

$$\ln A=\ln\lim_{x\to 0+}x^{\mathrm{tg}x}\overset{(0^0)}{=}\lim_{x\to 0+}\ln x^{\mathrm{tg}x}=\lim_{x\to 0+}\mathrm{tg}x\cdot\ln x\overset{(0\cdot\infty)}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\mathrm{ctg}x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0+}-\frac{\sin^2 x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0+}(-\sin x)=1\cdot 0=0$$

Поскольку $\ln A$=0, то A=1

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\mathrm{tg}x}\overset{(0^0)}{=}1$

6) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Решение. Введем обозначение A для значения предела и вычислим $\ln A$.

$$\lim_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x\overset{(\infty^0)}{=}A$$

$$\ln A=\ln\lim_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0+}x\cdot\ln\ln\frac{1}{x}\overset{(0\cdot\infty)}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\ln\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\left|\begin{array}{c} t=\dfrac{1}{x} \\ t\to+\infty \text{ при } x\to 0+\end{array}\right|$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\ln t}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\ln\ln t)'}{t'}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t\ln t}=0.$$ Тогда A=1

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x=1$

7) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

Решение. Введем обозначение A для значения предела и вычислим $\ln A$.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\mathrm{ctg}^2 x} \overset{(1^\infty)}{=} A$$

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\mathrm{ctg}^2 x} \overset{(1^\infty)}{=} \lim_{x\to 0} \mathrm{ctg}^2 x \cdot \ln(\cos x) \overset{(\infty\cdot 0)}{=} \lim_{x\to 0} \cos^2 x \cdot \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \cos^2 x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(\cos x))'}{(\sin^2 x)'} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{2\sin x \cdot \cos x} = -\frac{1}{2}.$$

Тогда $A = e^{-\frac{1}{2}}$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\mathrm{ctg}^2 x} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Дополнительные задачи

Задание. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$;

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \cdot e^{-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x}}$.

Ответы: 1) 1; 2) 0; 3) 0; 4) 1; 5) 1.