Производная и дифференцируемость функции. Таблица производных. Правила дифференцирования. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование неявно заданных и параметрически заданных функций

Задание 1.

Найти производную $f'(3)$ функции $f(x)=x^2-x+2$, пользуясь определением.

Решение.

По определению производной функции в точке $f'(3)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(3)}{\Delta x}$.

Придадим аргументу приращение Δx, составим приращение функции:

$$\Delta f(3)=f(3+\Delta x)-f(3)=(9+6\Delta x+\Delta x^2)-(3+\Delta x)+2-8=\Delta x^2+5\Delta x.$$

Тогда

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2+5\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(\Delta x+5)}{\Delta x}=5.$$

Задание 2.

Найти производные функций:

1) $y=\ln\sqrt{\cos x}$; 2) $y=e^{-x}\ln x$; 3) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x^2}$.

Решение.

1) Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции: $\left(f(u)\right)'=f'(u)\cdot u'$:

$$y'=\left(\ln\sqrt{\cos x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}\cdot(\sqrt{\cos x})'=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}\cdot(\cos x)'=\frac{-\sin x}{2\cos x}=-\frac{1}{2}tg\,x.$$

2) Воспользуемся правилами $(uv)'=u'v+uv'$ и $\left(f(u)\right)'=f'(u)\cdot u'$:

$$y'=(e^{-x}\ln x)'=(e^{-x})'\cdot\ln x+e^{-x}\cdot(\ln x)'=-e^{-x}\cdot\ln x+e^{-x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1-x\ln x}{xe^{x}}.$$

3) Воспользуемся правилом $\left(f(u)\right)'=f'(u)\cdot u'$:

$$y'=(\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2})'=\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2}\cdot(\frac{1}{x^2})'=\frac{x^4}{x^4+1}\cdot(-\frac{2}{x^3})=-\frac{2x}{x^4+1}.$$

Задание 3.

Найти производную функции, заданной неявно: $2xy^2-x^2y+x^2+2=0$.

Решение.

Продифференцируем обе части данного уравнения по переменной x, учитывая при этом, что y является функцией аргумента x

$$2y^2+4xyy'-2xy-x^2y'+2x=0.$$

Из полученного равенства выразим производную y'

$$y' = \frac{2xy-2y^2-2x}{4xy-x^2}.$$

Задание 4.

Найти производную функцию, заданной параметрически системой функций

$$\begin{cases} x = 2\cos t^2, \\ y = \sin t - 3t. \end{cases}$$

Решение.

Применяем правило дифференцирования функции, заданной параметрически $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Получим $y'_x = \dfrac{(\sin t-3t)'}{(2\cos t^2)'} = \dfrac{\cos t-3}{-4t\sin t^2} = \dfrac{3-\cos t}{4t\sin t^2}$.

Задание 5.

Найти производные функций: 1) $y = x^{\sin x}$; 2) $y = \dfrac{(x-1)^3\cdot\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

Решение.

1) Применим метод логарифмического дифференцирования. Используем формулу $y' = y\cdot(\ln y)'$. Учитывая, что $\ln y = \cdot\ln x^{\sin x} = \sin x\cdot\ln x$, получаем:

$$y' = x^{\sin x}(\sin x\cdot\ln x)' = x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

2) Применим метод логарифмического дифференцирования. Используем формулу

$$y' = y\cdot(\ln y)'.$$

Предварительно найдем ln *y*:

$$\ln y = \ln\frac{(x-1)^3\cdot\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$\ln y = 3\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)-\frac{2}{3}\ln(x+1)$$

$$(\ln y)' = \left(3\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)-\frac{2}{3}\ln(x+1)\right)'$$

Тогда

$$y' = \frac{(x-1)^3\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\left(\frac{3}{x-1}+\frac{1}{2(x+2)}-\frac{2}{3(x+1)}\right).$$

Дополнительные задачи

Задание 1. Найти производную $f'(2)$ функции $f(x) = x^2 - 3x + 1$, пользуясь определением.

Ответ: 1.

Задание 2. Найти производные функций:

1) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$; 2) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$; 3) $y = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 3x}$.

Ответы: 1) $2^{\frac{x}{\ln x}} \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \ln 2$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; 3) $\dfrac{e^{-\frac{x}{2}}(12\sin 3x - \cos 3x)}{2\cos^3 3x}$.

Задание 3. Найти y'_x неявно заданных функций:

1) $x^3 + y^3 = \sin(x - 2y)$; 2) $x - y = \arcsin x - \arcsin y$.

Ответы: 1) $\dfrac{\cos(x - 2y) - 3x^2}{3y^2 + 2\cos(x - 2y)}$; 2) $\sqrt{\dfrac{1 - y^2}{1 - x^2}} \cdot \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - y^2}}$.

Задание 4. Найти y'_x для заданной параметрически функции $y = y(x)$:

1) $x = t^3 + t$, $y = t^2 + t + 1$; 2) $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$.

Ответы: 1) $\dfrac{2t + 1}{3t^2 + 1}$; 2) $\dfrac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$.

Задание 5. Применяя логарифмическое дифференцирование, найти производные функций: 1) $y = x^{\ln x}$; 2) $y = \dfrac{(1 - x^2) \cdot \cos^6 x}{\sqrt[7]{x^5}}$.

Ответы: 1) $2x^{\ln x - 1} \ln x$; 2) $\dfrac{(x^2 - 1) \cdot \cos^6 x}{\sqrt[7]{x^5}} \cdot \left(\dfrac{2x}{1 - x^2} + 6\operatorname{tg} x + \dfrac{5}{7x}\right)$.