Предел функции в точке. Основные теоремы о пределе функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Задание. Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-2}{3x^2+x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+5x-14}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{\sin^2 5x}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\operatorname{tg}^2 x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sin^2\sqrt{9x}}$.

<u>Решение:</u>

1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-2}{3x^2+x-2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{3\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-0+0}{3+0-0}=\frac{1}{3};$$

2) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+5x-14}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+7)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x+7}=\frac{4}{9};$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\left|\begin{array}{l}t^6=x,\\ t\to 0 \text{ при } x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{t^3-4t^2}{t^4-t^2}=\lim_{x\to 0}\frac{t^2(t-4)}{t^2(t^2-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{t-4}{t^2-1}=4;$$

4) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{4x^2+1}+\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}}.$$

Далее рассмотри два случая:

1 случай: $x>0$ ($x\to+\infty$). Тогда $\dfrac{1}{x}=\left|\dfrac{1}{x}\right|=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{4x^2+1}+\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{3}$$

2 случай: $x<0$ ($x\to-\infty$). Тогда $\frac{1}{x}=-\left|\frac{1}{x}\right|=-\sqrt{\frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{4x^2+1}+\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{3}.$$

Вывод: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$ не существует.

При решении следующих примеров воспользуемся формулами первого и второго замечательных пределов и следствий из них.

5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2}{\sin^2 5x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}2\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{25}\cdot\frac{(5x)^2}{(\sin 5x)^2}\right)=\frac{2}{25}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{5x}{\sin 5x}\right)^2=\frac{2}{25}$;

6). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x\overset{\left(1^\infty\right)}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2}{x-1}\cdot x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{2x}{x-1}}=e^2$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+3\mathrm{tg}^2x\right)^{\mathrm{ctg}^2x}\overset{\left(1^\infty\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\left(1+3\mathrm{tg}^2x\right)^{\frac{1}{\mathrm{tg}^2x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+3\mathrm{tg}^2x\right)^{\frac{1}{3\mathrm{tg}^2x}\cdot3}=e^3$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(e^{2x}-1\right)2x}{2x}\cdot\frac{3x}{3x\cdot\arcsin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{\sin^2\sqrt{9x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\sin\sqrt{9x}}{\sqrt{9x}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{9x}\right)^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{9x}=\frac{1}{9}$.

Дополнительные задачи

Задание. Вычислить пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-8}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}2x}{\sin(5x^2-x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{(2x+5)^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x$.

Ответы: 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) предел не существует; 4) –2; 5) $\frac{1}{e^3}$.