Числовые последовательности

Задание 1.

Исследовать числовую последовательность $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ на монотонность и ограниченность.

Решение.

1) Исследуем последовательность (x_n) на монотонность. Для этого сравним x_n и x_{n+1}, определив знак их разности для произвольного индекса n:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

Тогда для любого натурального n выполняется неравенство $x_n > x_{n+1}$. Следовательно, по определению последовательность (x_n) строго убывает.

2) Исследуем последовательность (x_n) на ограниченность. Выполним оценку общего члена последовательности:

Очевидно, $x_n = \dfrac{n}{n+1} \geq 0 \ \ \forall n \in \mathrm{N}$.

С другой стороны $x_n = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+1-1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} \leq 1 \ \ \forall n \in \mathrm{N}$.

Вывод: по определению, последовательность (x_n) ограничена.

Задание 2.

Доказать по определению $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Решение. Запишем определение предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \overset{Df}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathrm{N} \forall n \in \mathrm{N} (n > N \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon).$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Для поиска натурального N решим неравенство $\left| \dfrac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \qquad (*)$$

В качестве N выберем одно из решений неравенства (*). Положим $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 2$. Поскольку N – целое и $N \geq 1$, то $N \in \mathrm{N}$.

Возьмем произвольное натуральное число $n > N$. Получаем: $n > N$, а по построению $N > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Тогда $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Из цепочки эквивалентных преобразований (*) следует

$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$. По определению предела числовой последовательности это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

Задание 3.

Найти предел числовой последовательности (x_n) или установить её расходимость:

1) $x_n=\dfrac{3n^2-n+2}{5n^2+2}$; 2) $x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+2}}{3n-1}$; 3) $x_n=\dfrac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1}$;

4) $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$; 5) $x_n=\dfrac{n\cos\frac{\pi n}{3}}{n^2+1}$.

Решение.

1) $$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+2}{5n^2+2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=\frac{3-0+0}{5+0}=\frac{3}{5};$$

2) $$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}}{3n-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\sqrt{n^2+1}}{\frac{1}{n}(3n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{1+0}}{3-0}=\frac{1}{3};$$

3) $$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3}}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}\overset{\left(\frac{1}{0}\right)}{=}\infty;$$

(Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\right)=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}=\infty$).

Следовательно, $\left(\dfrac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n}+1}\right)$ – расходящаяся последовательность.

4) $$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\overset{\left(\frac{2}{\infty}\right)}{=}0$$

(Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)=\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=0$).

5) $(x_n)=(u_n\cdot v_n)$, где $u_n=\dfrac{n}{n^2+1}$, $v_n=\cos\dfrac{\pi n}{3}$.

(u_n) – бесконечно малая последовательность, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1+0}=0.$$

(v_n) – ограниченная последовательность, так как $|\cos\frac{n\pi}{3}|\le 1 \ \forall n\in \mathrm{N}$.

Тогда последовательность (x_n) является бесконечно малой как произведение бесконечно малой последовательности и ограниченной последовательностей, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cos\frac{\pi n}{3}}{n^2+1} = 0.$$

Дополнительные задачи

1. Исследовать числовые последовательности на монотонность и ограниченность:

   1) $x_n = \dfrac{n}{2n-1}$; 2) $y_n = 3n-1$.

2. Доказать по определению $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+3}{2n-1} = 2$.

3. Вычислить пределы:

   1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+2)^2}{5n^2+3}$;

   2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)$;

   3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{3n}$.