Числовые последовательности

Определение. Числовой последовательностью называется числовая функция, областью определения которой является множество натуральных чисел **N.**

Числовая последовательность обозначается символом (a_n)

a_n – n-ый или общий член последовательности.

Способы задания числовой последовательности

1. Формулой общего члена

Пример: $a_n = \frac{1}{n}$

2. Рекуррентным соотношением

Пример – последовательность Фибоначчи.

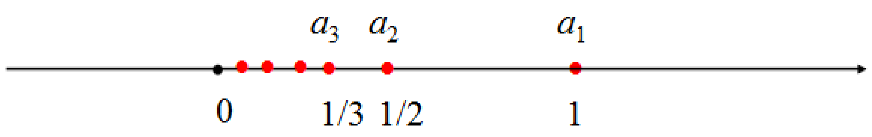
3. Описательный способ

Способы изображения числовой последовательности

1. Точками числовой прямой

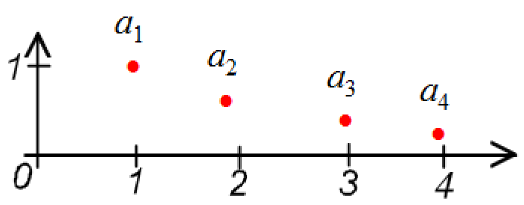
Пример: $a_n = \frac{1}{n}$

1, ½, 1/3, …



2. Точками координатной плоскости:

$a_n = \frac{1}{n}$ $(n, \frac{1}{n})$



Свойства числовой последовательности

1. Ограниченность

Последовательность (a_n) называется ограниченной сверху, если все ее члены не превосходят некоторого действительного числа.

$$(a_n) \text{ ограничена сверху} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathbf{N}\ \ a_n \le M$$

Последовательность (a_n) называется ограниченной снизу, если все ее члены не меньше некоторого действительного числа.

$$(a_n) \text{ ограничена снизу} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbf{R}\ \forall n \in \mathrm{N}\ \ a_n \ge m$$

Последовательность (a_n) называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу:

$$(a_n) \text{ ограничена} \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathrm{R}\ \forall n \in \mathbf{N}\ \ a \le a_n \le b$$

$$(a_n) \text{ ограничена} \Leftrightarrow \exists M \ge 0\ \forall n \in \mathbf{N}\ \ |a_n| \le M$$

2.Монотонность

Последовательность (a_n) называется возрастающей, если каждый ее член меньше или равен следующему:

$$\boxed{(a_n)\uparrow \overset{Df}{\Leftrightarrow} \forall n \in \mathrm{N}(a_n \le a_{n+1})}$$

Последовательность (a_n) называется строго возрастающей, если каждый ее член меньше следующего:

$$\boxed{(a_n)\uparrow\uparrow \overset{Df}{\Leftrightarrow} \forall n \in \mathrm{N}(a_n < a_{n+1})}$$

Последовательность (a_n) называется убывающей, если каждый ее член больше или равен следующему:

$$\boxed{(a_n)\downarrow \overset{Df}{\Leftrightarrow} \forall n \in \mathrm{N}(a_n \ge a_{n+1})}$$

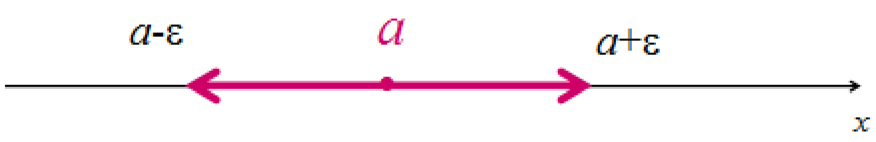
Последовательность (a_n) называется строго возрастающей, если каждый ее член меньше следующего:

$$\boxed{(a_n)\downarrow\downarrow \overset{Df}{\Leftrightarrow} \forall n \in \mathrm{N}(a_n > a_{n+1})}$$

$$\boxed{(a_n) - \text{стационарна} \overset{Df}{\Leftrightarrow} \forall n \in \mathrm{N}(a_n = a_{n+1})}$$

Лекция 2. Предел числовой последовательности. Основные теоремы о пределе числовой последовательности

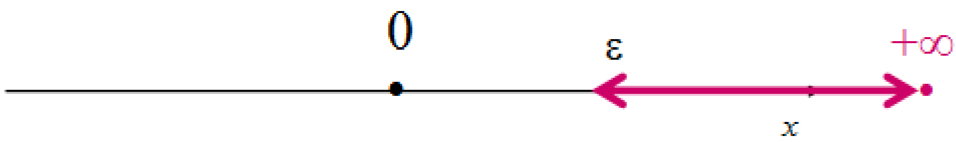
Окрестность точки



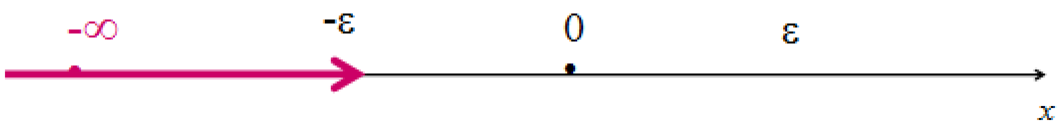
$$U_\varepsilon(a) = (a\text{-}\varepsilon,\ a+\varepsilon)$$

- окрестность точки *a* радиуса ε

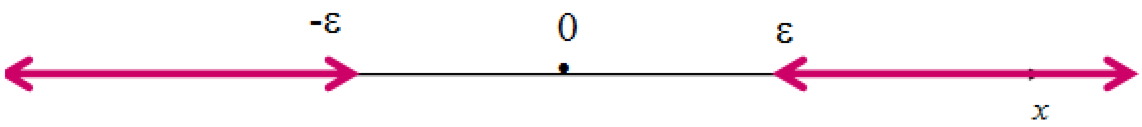
Окрестности бесконечно удаленных точек



$$U_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon,\ +\infty)$$



$$U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty,\ -\varepsilon)$$



$$U_\varepsilon(\infty) = (-\infty,-\varepsilon) \cup (\varepsilon,+\infty)$$

Предел числовой последовательности

Число a называется пределом числовой последовательности (an), если для любой ε-окрестности точки a найдется такое натуральное число N, что для всех индексов n, больших чем N, члены последовательности an принадлежат ε-окрестности точки a.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a \overset{Df}{\Leftrightarrow} \forall U_\varepsilon(a) \exists N \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N} (n > N \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a))}$$

Определение на языке неравенств:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a \overset{Df}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N} (n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)}$$

Последовательность (a_n) называется бесконечно малой, если $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

Бесконечно большие последовательности

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \overset{Df}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N} (n > N \Rightarrow a_n > \varepsilon)}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \overset{Df}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N} (n > N \Rightarrow a_n < -\varepsilon)}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \overset{Df}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N} (n > N \Rightarrow |a_n| > \varepsilon)}$$

Теорема 1. *Об единственности предела сходящейся последовательности.*
Если последовательность сходится, то её предел единственен.

Теорема 2. *Необходимое условие сходимости.*
Если последовательность сходится, то она ограничена.

Теорема 3. *О произведении бесконечно малой и ограниченной последовательностей.*

Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 4. *О подпоследовательности сходящейся последовательности.*

Если последовательность сходится, то любая её подпоследовательность тоже сходится и имеет тот же предел.

Теорема 5. *Об арифметических операциях над сходящимися последовательностями*

Пусть последовательности (a_n) и (b_n) сходятся,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Тогда

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ при условии $b \neq 0$.