Числовые функции и их свойства

Задание 1.

Пусть X – множество всех выпуклых четырехугольников на плоскости, Y – множество точек этой плоскости. Выясните, какие из нижеприведенных соответствий между множествами X и Y являются отображениями, а какие не являются таковыми. Найдите их области определения.

Четырехугольнику соответствует:

1) точка пересечения его диагоналей;

2) множество центров всех окружностей, не пересекающихся с его сторонами;

3) центр вписанной в него окружности.

Решение.

1) Так как у каждого выпуклого четырехугольника существует единственная точка пересечения диагоналей, то данное соответствие является функциональным, всюду определенным соответствием, то есть отображением.

2) Поскольку существует бесконечно много окружностей, не пересекающихся со сторонами данного четырехугольника, то заданное соответствие (всюду определенное) не является отображением.

3) Соответствие является функциональным, но, так как не в любой четырехугольник можно вписать окружность, оно не всюду определено: его область определения – множество таких четырехугольников, в которые можно вписать окружность. Следовательно, это не отображение.

Задание 2.

Определите, являются ли ниже приведенные соответствия функциональными, сюръективными, инъективными и биективными:

1) каждому автомобилю ставится в соответствие регистрационный номер;

2) каждому квадрату на плоскости ставится в соответствие точка пересечения его диагоналей (область отправления – множество всех квадратов на плоскости; область прибытия – множество всех точек плоскости);

3) соответствие, заданное формулой $y = 1/\cos x$.

Решение.

1) Соответствие функционально, так как каждому автомобилю ставится в соответствие ровно один номер; не сюръективно, так как существуют регистрационные номера, не принадлежащие никакой машине; инъективно, поскольку разным автомобилям соответствуют разные номера; не взаимно однозначно.

2) Соответствие функционально, так как у каждого квадрата есть точка пересечения его диагоналей, то есть это отображение; сюръективно, так как любой точке плоскости соответствует какой-либо квадрат, точкой пересечения диагоналей которого она является; не инъективно, так как существуют квадраты, у которых одна и та же точка пересечения диагоналей; не взаимно однозначно.

3) Соответствие определено в точках $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, где косинус обращается в ноль и дробь не существует; функционально, так как каждому допустимому значению аргумента ставится в соответствие единственное значение зависимой переменной; не сюръективно, так как в точки интервала (–1; 1) ничего не отображается; не инъективно, в силу периодичности косинуса, следовательно, не взаимно однозначно.

Задание 3.

Докажите, пользуясь определением, что функция $y = x^2$ строго возрастает на промежутке $[0,+\infty)$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 - произвольные точки из $[0,+\infty)$, удовлетворяющие неравенству $x_1<x_2$. Сравним значения функции в этих точках. Для этого оценим знак разности $f(x_2)-f(x_1)=x_2^{\,2}-x_1^{\,2}=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$.

Так как $x_1 < x_2$, то $x_2-x_1>0$, а из неравенств $x_1\ge 0$ и $x_2>0$ следует, что $x_2+x_1>0$. Таким образом, оба сомножителя положительны и, значит, $f(x_1)<f(x_2)$. Доказательство завершено.

Задание 4.

Исследуйте на четность/нечетность функции:

1) $f(x)=x\sin x$;
2) $f(x)=x\sqrt{x-1}$;
3) $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2-1}$.

Решение.

1) Имеем:
   - $D_f=\mathrm{R}$ – симметричное относительно нуля множество;
   - $f(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=f(x)$ для всех $x\in\mathrm{R}$.

   Вывод: f – четная функция.

2) У данной функции область определения $D_f=[1,+\infty)$ – не симметричное относительно нуля множество. Вывод: функция f не является ни четной, ни нечетной.

3) Исследуя по определению, получаем:

- $D_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ – симметричное относительно нуля множество;
- $f(-x)=(-x+1)\sqrt{(-x)^2-1}=(1-x)\sqrt{x^2-1}$. Докажем, что $f(-x)\ne f(x)$ и $f(-x)\ne -f(x)$. Возьмем из области определения функции две симметричные относительно нуля точки, например, -2 и 2, и вычислим в них значения функции.

Получим: $f(-2)=(-2+1)\sqrt{(-2)^2-1}=-\sqrt{3}$, $f(2)=(2+1)\sqrt{2^2-1}=3\sqrt{3}$. Очевидно, $f(-2)\ne f(2)$ и $f(-2)\ne -f(2)$.

Вывод: функция f не является ни четной, ни нечетной.

Задание 5.

Исследуйте на периодичность функции:

1) $f(x)=1$;

2) $f(x)=x^2$.

Решение.

1) Функция $f(x)=1$ является периодической. Для нее любое число $T\ne 0$ является периодом, поскольку:

- D_f =R,
- $f(x+T)=1=f(x)$ для любого x. Так как во множестве всех действительных положительных чисел нет наименьшего элемента, то функция $f(x)=1$ не имеет основного периода.

2) Функция $f(x)=x^2$ не является периодической.

Покажем, что никакое число $T \neq 0$ не является периодом функции. Действительно, для любого число $T \neq 0$ имеем: $f(0+T)=T^2 \neq 0 = f(0)$. Следовательно, функция $f(x)=x^2$ – не периодическая.

Дополнительные задачи

1. Доказать, что функция $f(x)=x^2-2x+3$

1) строго возрастает на $[1, +\infty)$, но не монотонна,
2) не является ни четной, ни нечетной,
3) не является периодической.

2. Каждому человеку поставлено в соответствие число его полных лет (из множества целых неотрицательных чисел). Докажите, что это отображение, оно не инъективно и не сюръективно.